D 19 OCT 7 1938

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 179

Heft 2

Ausgegeben am 25. August 1938

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1938

Band 179. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
van der Waerden, B. L., Über die Bestimmung eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden	65
Brühl, Gerhard, Definition von Primteilern im rationalen Körper dreier unabhängiger Veränderlichen	69
Weiß, E. A., Die elliptische Normalkurve sechster Ordnung als Tripelreihe	90
Watson, G. N., Ramanujans Vermutung über Zerfällungsanzahlen	97

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Über die Bestimmung eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden.

Von *B. L. van der Waerden* in Leipzig.

In einer sehr interessanten Arbeit über den in der Überschrift genannten Gegenstand [1]) hat H. Wolff gezeigt, daß das Problem der Bestimmung eines Dreiecks aus gegebenen Winkelhalbierenden auf eine Gleichung zehnten Grades

$$(1)\qquad \begin{aligned} F(t) = {} & t^{10} - \tfrac{5}{2}\, a_2 t^8 + \tfrac{7}{2}\, a_3 t^7 + \tfrac{3\,3}{1\,6}\, a_2^2 t^6 - \tfrac{4\,7}{8}\, a_2 a_3 t^5 \\ & + (\tfrac{1}{4}\, a_2 a_4 - \tfrac{5}{8}\, a_2^3 + \tfrac{6\,1}{1\,6}\, a_3^2)\, t^4 + (\tfrac{5}{2}\, a_2^2 a_3 - \tfrac{1}{4}\, a_4 a_3)\, t^3 \\ & + (\tfrac{1}{1\,6}\, a_2^4 - \tfrac{1}{4}\, a_2^2 a_4 - \tfrac{2\,5}{8}\, a_2 a_3^2)\, t^2 + (\tfrac{1}{2}\, a_2 a_3 a_4 - \tfrac{1}{8}\, a_2^3 a_3 + \tfrac{5}{4}\, a_3^3)\, t \\ & + (\tfrac{1}{1\,6}\, a_2^2 a_3^2 - \tfrac{1}{4}\, a_4 a_3^2) = 0 \end{aligned}$$

zurückgeführt werden kann, welche im Rationalitätsbereich $\mathfrak{R}(a_2, a_3, a_4)$ irreduzibel ist [2]). Die Frage der algebraischen Auflösbarkeit dieser Gleichung blieb aber offen. Sie soll im folgenden beantwortet werden durch den Nachweis, daß die Gruppe der Gleichung $F(t) = 0$ in bezug auf den Grundkörper $\mathfrak{R}(a_2, a_3, a_4)$ die symmetrische $\mathfrak{S}_{10}$ ist. Dabei ist $\mathfrak{R}$ etwa der Körper der rationalen Zahlen.

Der Grundgedanke des Beweises ist folgender. Bei einer Erweiterung des Grundkörpers kann die Gruppe einer Gleichung sich nur auf eine Untergruppe reduzieren. Wir erweitern nun den Körper $\mathfrak{R}(a_2, a_3, a_4)$ zum Körper Π der Potenzreihen nach absteigenden Potenzen von a_4 (oder nach aufsteigenden Potenzen von a_4^{-1}), deren Koeffizienten rationale Funktionen von a_2 und a_3 über dem Körper der dritten Einheitswurzeln sind. In bezug auf diesen erweiterten Grundkörper Π zerfällt die Gleichung (1), wie wir sehen werden, in irreduzible Faktoren vom ersten, dritten und sechsten Grad. Ihre Gruppe wird ein direktes Produkt einer symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_3$, welche nur drei Wurzeln permutiert, und einer zyklischen $\mathfrak{Z}_6$, welche sechs Wurzeln zyklisch vertauscht. Da diese Gruppe $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{Z}_6$ eine Transposition enthält, muß auch die umfassendere ursprüngliche Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Transposition enthalten. Außerdem ist $\mathfrak{G}$, wie wir sehen werden, primitiv und transitiv. Also kann sie nur die symmetrische $\mathfrak{S}_{10}$ sein.

Die Faktorzerlegung von $F(t)$ im Bereich der Potenzreihen vollzieht sich auf Grund des *Henselschen Lemmas* [3]), das für unsere Zwecke allgemein folgendermaßen ausgesprochen werden kann:

---

[1]) H. Wolff, Über die Bestimmung eines ebenen Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden, dieses Journal **177** (1937), S. 134—151.

[2]) Die Bedeutung der Größen a_2, a_3, a_4 möge man bei Wolff [1]) nachlesen. In dieser Arbeit werden a_2, a_3, a_4 einfach als Unbestimmte behandelt.

[3]) Siehe etwa K. Rychlik, Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper, dieses Journal **153** (1924), S. 94—107, insbes. § 12. Oder v. d. Waerden, Moderne Algebra **1** (2. Aufl.), § 76.

Wenn ein Polynom $f(t)$, dessen Koeffizienten Potenzreihen in x sind, für $x = 0$ in zwei teilerfremde Faktoren $g_0(t) \cdot h_0(t)$ zerfällt, wobei $g_0(t)$ den Grad r hat, so zerfällt $f(t)$ im Körper Π der Potenzreihen in zwei Faktoren $g(t) \cdot h(t)$, die für $x = 0$ in $g_0(t)$ und $h_0(t)$ übergehen, wobei $g(t)$ den Grad r hat und im Anfangsglied $c_0 t^r$ mit $g_0(t)$ übereinstimmt.

Zur Anwendung des Lemmas multiplizieren wir $F(t)$ mit $4a_4^{-1}$ und setzen $a_4^{-1} = x$. Für $x = 0$ reduziert sich $4xF(t)$ auf

$$\begin{aligned} g_0(t) &= a_2 t^4 - a_3 t^3 - a_2^2 t^2 + 2a_2 a_3 t - a_3^2 \\ &= (a_2 t - a_3)(t^3 - a_2 t + a_3). \end{aligned}$$

Als zweiten Faktor $h_0(t)$ nehmen wir die Einheit 1. Es folgt, daß $4xF(t)$ in zwei Faktoren $g(t)\ h(t)$ zerfällt, von denen der erste den Grad 4 hat und sich für $x = 0$ auf $(a_2 t - a_3)(t^3 - a_2 t + a_3)$ reduziert, während der zweite Faktor den Grad 6 hat und sich für $x = 0$ auf 1 reduziert. Das Anfangsglied des ersten Faktors ist $a_2 t^4$, das Anfangsglied des zweiten Faktors folglich $4a_2^{-1} x t^6$. Auf den ersten Faktor können wir noch einmal das Henselsche Lemma anwenden und finden eine Zerlegung in zwei Faktoren der Grade 1 und 3. Insgesamt zerfällt $4xF(t)$ im Körper Π in drei Faktoren der Grade 1, 3, 6:

$$4xF(t) = f_1(t)\, f_3(t)\, f_6(t), \tag{2}$$

welche sich für $x = 0$ auf $(a_2 t - a_3)$, $(t^3 - a_2 t + a_3)$ und 1 reduzieren.

Nach dem Eisensteinschen Kriterium ist $f_6(t)$ irreduzibel, denn alle Glieder mit Ausnahme des konstanten Gliedes sind durch x teilbar, und das Anfangsglied $4a_2^{-1} x t^6$ ist nicht durch x^2 teilbar. $f_6(t)$ wird aber reduzibel nach Adjunktion von

$$u = \sqrt[6]{-4a_2^{-1} x} = \sqrt[6]{-4a_2^{-1} a_4^{-1}}.$$

Wenn man nämlich in $f_6(t)$ überall x durch u ausdrückt:

$$x = -\tfrac{1}{4} a_2 u^6, \tag{3}$$

so werden alle Glieder mit Ausnahme des konstanten durch u^6 teilbar, während das Anfangsglied in $-u^6 t^6$ übergeht. Betrachtet man dann $tu = z$ als neue Variable, so erhält man ein Polynom $f_6^*(z)$, das sich für $u = 0$ auf

$$-z^6 + 1$$

reduziert. Im Bereich der sechsten, also auch der dritten Einheitswurzeln zerfällt $-z^6 + 1$ in sechs verschiedene Linearfaktoren:

$$-z^6 + 1 = -\prod_1^6 (z - \zeta^\nu), \qquad \zeta^6 = 1,$$

Nach dem Henselschen Lemma zerfällt also $f_6^*(z)$ ebenfalls in sechs Linearfaktoren:

$$f_6(t) = f_6^*(z) = -\prod_1^6 (z - P_\nu) = -\prod_1^6 (ut - P_\nu), \tag{4}$$

wobei die P_ν Potenzreihen in u sind, die mit ζ^ν anfangen.

Schließlich kann auch $f_3(t)$ in Linearfaktoren zerfällt werden, wenn man die Wurzeln w_1, w_2, w_3 des Polynoms $t^3 - a_2 t + a_3$ adjungiert. Dabei ist $w_1 + w_2 + w_3 = 0$. Ebenso wie man bei der „allgemeinen Gleichung n-ten Grades“ statt der Koeffizienten auch

die Wurzeln als neue Unbestimmte betrachten kann [4]), so kann man hier w_1 und w_2 als neue Unbestimmte betrachten und $w_3 = -w_1 - w_2$ setzen. Die ursprünglichen Unbestimmten a_2, a_3 sind vermöge

$$a_2 = -w_1 w_2 - w_1 w_3 - w_2 w_3 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2,$$
$$a_3 = -w_1 w_2 w_3 = w_1 w_2 (w_1 + w_2)$$

durch die neuen ausgedrückt. Im Bereich der neuen Unbestimmten gilt die Faktorzerlegung

$$t^3 - a_2 t + a_3 = (t - w_1)(t - w_2)(t - w_3).$$

Nach dem Henselschen Lemma zerfällt also $f_3(t)$ ebenfalls in Linearfaktoren:

$$f_3(t) = (t - Q_1)(t - Q_2)(t - Q_3); \tag{5}$$

dabei sind Q_1, Q_2, Q_3 Potenzreihen in x, deren Koeffizienten rationale Funktionen von w_1 und w_2 sind, und die sich für $x = 0$ auf w_1, w_2, w_3 reduzieren. Die Potenzreihen in x können vermöge (3) auch als Potenzreihen in u geschrieben werden.

Der neue Körper Ω, *in welchem das Polynom* (2) *vollständig in Linearfaktoren zerfällt, besteht also aus allen Potenzreihen in* u, *deren Koeffizienten rationale Funktionen von* w_1 *und* w_2 *sind.*

Wir können nun sofort eine Gruppe von 36 Automorphismen des Normalkörpers Ω angeben, welche die Linearfaktoren von $F(t)$ untereinander permutieren, aber die Elemente des Grundkörpers Π ungeändert lassen. Die Gruppe ist das direkte Produkt von zwei Untergruppen. Die erste Untergruppe $\mathfrak{S}_3$ besteht aus den Automorphismen, welche w_1, w_2 und w_3 untereinander permutieren, aber u ungeändert lassen. Die Gruppe $\mathfrak{S}_3$ läßt offenbar a_2 und a_3 ungeändert, ebenso x und $a_4 = x^{-1}$, also läßt sie alle Wurzeln $u^{-1}P_1, u^{-1}P_2, \ldots, u^{-1}P_6$ des Polynoms (4) ungeändert; sie permutiert aber die Potenzreihen Q_1, Q_2, Q_3 aus der Zerlegung (5) genau so, wie sie ihre Anfangsglieder w_1, w_2, w_3 permutiert. Die zweite Untergruppe $\mathfrak{Z}_6$ besteht aus den Automorphismen, welche w_1, w_2, w_3 ungeändert lassen, aber u durch $\zeta^\nu u$ ersetzen, wobei ζ wieder eine primitive sechste Einheitswurzel ist. Die Gruppe läßt a_2, a_3 und nach (3) auch x und $a_4 = x^{-1}$ ungeändert, permutiert aber die Wurzeln $P_\nu u^{-1}$ des Produktes (4) zyklisch, weil sie ihre Anfangsglieder $\zeta^\nu u^{-1}$ zyklisch permutiert.

Die Gruppe $\mathfrak{S}_3$ enthält insbesondere eine Transposition, welche zwei Wurzeln von $f_3(t)$ vertauscht und alle übrigen Wurzeln von $F(t)$ ungeändert läßt. Sie enthält aber auch eine Permutation vom Typus (123) (456789), wobei der Faktor (123) aus $\mathfrak{S}_3$, der Faktor (456789) aus $\mathfrak{Z}_6$ entnommen wurde.

Wir sind nun imstande, die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ der Gleichung (1) in bezug auf den ursprünglichen Grundkörper $\mathfrak{R}(a_2, a_3, a_4)$ zu bestimmen. Zunächst ist $\mathfrak{G}$ transitiv, weil $F(t)$ nach Wolff irreduzibel ist. Weiter enthält $\mathfrak{G}$ eine Transposition. Schließlich ist $\mathfrak{G}$ primitiv. Wäre nämlich $\mathfrak{G}$ imprimitiv, so müßten die Wurzeln entweder in 5 Imprimitivitätsgebiete zu je 2 Wurzeln oder in 2 Imprimitivitätsgebiete zu je 5 Wurzeln zerfallen. Jede Permutation der Galoisschen Gruppe, die eine Wurzel festläßt, müßte also entweder 2 Wurzeln oder 5 Wurzeln nur untereinander permutieren. Die Permutation (123) (456789) hat aber nicht diese Eigenschaft. Also ist $\mathfrak{G}$ primitiv.

---

[4]) Vgl. etwa B. L. v. d. Waerden, Moderne Algebra 1, 2. Aufl., § 57 (1. Aufl. § 52).

Eine transitive, primitive Permutationsgruppe, die eine Transposition enthält, ist aber bekanntlich die symmetrische [5]).

Es wäre denkbar, daß die Gruppe $\mathfrak{S}_{10}$ sich auf die alternierende $\mathfrak{A}_{10}$ reduziert, wenn man den Grundkörper $\Re(a_2, a_3, a_4)$ durch den umfassenderen Grundkörper $\Re(v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)$ ersetzt. — Eine weitere Reduktion ist unmöglich, denn $\mathfrak{S}_{10}$ besitzt außer sich selbst und $\mathfrak{A}_{10}$ keine Untergruppe von Index $\leqq 6$, und $\Re(v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)$ hat den Grad 6 über $\Re(a_2, a_3, a_4)$.

[5]) Zur Bequemlichkeit des Lesers möge der Beweis, den ich in Math. Ann. **111** (1935), S. 733, gegeben habe, hier wiederholt werden. Wir zerlegen die permutierten Objekte in Gebiete, indem wir zwei Objekte a und e zum gleichen Gebiet rechnen, wenn sie durch eine Kette von Transpositionen $(ab), (bc), \ldots, (de)$ aus der Gruppe $\mathfrak{G}$ verbunden werden können. Diese Zerlegung ist gegenüber der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant. Wenn also die Gruppe $\mathfrak{G}$ transitiv und primitiv ist, so müssen alle Objekte zum gleichen Gebiet gehören, d. h. je zwei Objekte lassen sich durch eine Kette von Transpositionen verbinden. Mit Hilfe der Relation

$$(bc)\,(ab)\,(bc) = (ac)$$

kann man jede Kette von Transpositionen schrittweise verkürzen, bis sie nur aus einer Transposition besteht. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ enthält somit sämtliche Transpositionen (ae). Diese erzeugen aber die symmetrische Permutationsgruppe.

Eingegangen 17. November 1937.

Definition von Primteilern im rationalen Körper dreier unabhängiger Veränderlichen *).

Von *Gerhard Brühl* in Halle.

Einleitung.

Der rationale Körper dreier unabhängiger Veränderlichen.

In dieser Arbeit sollen Primteiler im Körper der rationalen Funktionen von drei Veränderlichen definiert werden. Hierbei werden die Begriffe und Bezeichnungen verwandt, die von Herrn H. W. E. Jung für den Körper der algebraischen Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen entwickelt worden sind [1]). Es werden nur die Primteiler der Dimension 2 behandelt, denn die Primteiler der Dimension 1 und 0 des Körpers dreier Veränderlichen sind identisch mit den Primteilern im algebraischen Körper zweier und einer unabhängigen Veränderlichen.

Der Körper $K = (x, y, z)$ der drei unabhängigen komplexen Veränderlichen x, y, z umfaßt die Gesamtheit der rationalen Funktionen von x, y, z. Die Gesamtheit der Werte der drei Veränderlichen denken wir auf je einer Zahlenkugel ausgebreitet. Jeder der drei Wertevorräte wird abgeschlossen durch einen uneigentlichen Wert, den wir $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \infty$ nennen.

Durch ein Wertetripel x_0, y_0, z_0 der Veränderlichen x, y, z wird eine Stelle

$$S = (x_0, y_0, z_0)$$

des Körpers K definiert. Hierbei kann x_0, y_0, z_0 auch den Wert ∞ annehmen. Um die Funktionen in der Umgebung von S darzustellen, setzen wir

$$(1)\qquad \begin{aligned} &x - x_0 = u \text{ für endliches } x_0; \qquad \frac{1}{x} = u \text{ für } x_0 = \infty, \\ &y - y_0 = v \text{ für endliches } y_0; \qquad \frac{1}{y} = v \text{ für } y_0 = \infty, \\ &z - z_0 = w \text{ für endliches } z_0; \qquad \frac{1}{z} = w \text{ für } z_0 = \infty. \end{aligned}$$

u, v, w heißen Ortsfunktionen der Stelle S. Sie gehören dem Körper K an. Mit (1) werden

---

*) Diese Arbeit wurde der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg als Dissertation vorgelegt. Referent war Herr Prof. Dr. H. W. E. Jung.

[1]) H. W. E. Jung, Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Berlin-Leipzig 1923.

H. W. E. Jung, Algebraische Flächen, Hannover 1925.

H. W. E. Jung, Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher, Manuskript im Mathematischen Seminar der Universität zu Halle.

Vgl. ferner K. Hensel, Über eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen, Acta math. **23** (1900), S. 339—416.

die Funktionen von K rationale Funktionen der Ortsfunktionen, und da es nur auf das Verhalten bei S ankommt, können u, v, w auf kleine Werte beschränkt werden.

$$u = v = w = 0$$

liefert das Verhalten einer Funktion in S. Nicht alle Funktionen nehmen bei S und in allen Stellen der Umgebung von S einen bestimmten Wert an.

Für die geometrische Veranschaulichung müssen wir uns auf die reellen Werte der drei Veränderlichen beschränken. Wir denken sie in einem rechtwinkligen kartesischen xyz-Koordinatensystem ausgebreitet. Da x, y, z unabhängig voneinander alle Werte, auch den uneigentlichen, annehmen sollen, müssen die uneigentlichen Elemente passend definiert werden. Dies wird erreicht, indem der xyz-Raum durch drei uneigentliche Ebenen abgeschlossen wird. Die drei uneigentlichen Ebenen seien mit h_1, h_2, h_3 bezeichnet. Es ist:

$$\begin{aligned} h_1&: \quad x = \infty; \quad y, z \text{ beliebig.} \\ h_2&: \quad y = \infty; \quad z, x \text{ beliebig.} \\ h_3&: \quad z = \infty; \quad x, y \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

Wir setzen: $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$, $\frac{1}{z} = z'$. Dann lauten die Gleichungen der drei uneigentlichen Ebenen

$$h_1: \; x' = 0, \quad h_2: \; y' = 0, \quad h_3: \; z' = 0.$$

Die drei uneigentlichen Ebenen schneiden sich zu je zweien in einer uneigentlichen Geraden. Diese drei uneigentlichen Geraden seien mit l_1, l_2, l_3 bezeichnet. Die Gleichungen dieser drei Geraden sind

$$\begin{aligned} l_1&: \quad x' = 0, \quad y' = 0\,, \\ l_2&: \quad x' = 0, \quad z' = 0\,, \\ l_3&: \quad y' = 0, \quad z' = 0\,. \end{aligned}$$

l_1, l_2, l_3 schneiden sich in einem Punkte. Es ist der uneigentliche Punkt $U = (\infty, \infty, \infty)$. Durch diese Definition ist erreicht, daß jedem Wertetripel (x, y, z) ein und nur ein Punkt im xyz-Raum entspricht, wobei x, y, z unabhängig voneinander auch den Wert ∞ annehmen können.

Eine Funktion des Körpers sei gegeben durch $R = \frac{G}{H}$, wobei G und H als teilerfremde Polynome angenommen werden dürfen. R wird dort unbestimmt, wo Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden. Geometrisch stellt die Gesamtheit der Unbestimmtheitsstellen eine Raumkurve dar, die der vollständige Schnitt der beiden Flächen $G = 0$ und $H = 0$ ist, wozu noch die uneigentlichen Geraden l_1, l_2, l_3 kommen können. Die allgemeine lineare Funktion $r = ax + by + cz + d$ hat als Unbestimmtheitskurven nur die drei uneigentlichen Geraden l_1, l_2, l_3. Die einzigen überall bestimmten linearen Funktionen sind die einer einzigen Veränderlichen. Z. B.

$$r = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

I. Kapitel.
Die homomorphe Abbildung des Körpers *K* und die allgemeine Definition der Primteiler der Dimension 2 in *K*.

§ 1. Die homomorphe Abbildung eines Körpers *K* auf einen Körper *A*.

1. *Definition der homomorphen Abbildung.* Wir betrachten im folgenden Abbildungen des Körpers K der rationalen Funktionen dreier Veränderlichen auf einen algebraischen Körper A der Dimension 2.

Eine Abbildung des Körpers K auf A ist eine Zuordnung, bei der jeder Funktion aus K eine Funktion aus A zugeordnet wird. Dabei betrachten wir ∞ auch als Funktion von A und sagen, $R \to \infty$, wenn $\frac{1}{R} \to 0$. Das Symbol $R \to r$ bedeutet: R aus K wird auf r aus A abgebildet. Dafür sagen wir kurz: R geht in r über.

Die Abbildung ist homomorph, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Werden die beiden Funktionen R_1 und R_2 auf r_1 und r_2 abgebildet, so muß sein

$$R_1 \pm R_2 \to r_1 \pm r_2,$$
$$R_1 \cdot R_2 \to r_1 \cdot r_2,$$
$$\frac{R_1}{R_2} \to \frac{r_1}{r_2}.$$

Hierbei schließen wir bei $R_1 \cdot R_2$ die Fälle $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$; $r_1 = \infty$, $r_2 = 0$ und bei $\frac{R_1}{R_2}$ die Fälle $r_1 = r_2 = 0$ und $r_1 = r_2 = \infty$, ferner bei $R_1 \pm R_2$ den Fall $r_1 = r_2 = \infty$ aus. Auch in diesen Fällen sollen $R_1 \cdot R_2$, $\frac{R_1}{R_2}$ und $R_1 \pm R_2$ gemäß der Definition der Abbildung auf bestimmte Funktionen aus A abgebildet werden.

2. *Folgerungen.* Aus unserer Definition ziehen wir einige Folgerungen.

Folgerung 1. Eine homomorphe Abbildung des Körpers K auf den Körper A ordnet jeder Funktion aus K eine und nur eine Funktion aus A zu.

Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Definition der Abbildung. Zum Beweis des zweiten Teiles machen wir die Annahme

$R_1 \to r_1'$ und r_1'' neben noch anderen möglichen,
$R_2 \to r_2$ „ „ „ „
$R_1 + R_2 = R_3 \to r_3$ „ „ „ „ .

Da die Abbildung homomorph ist, gilt $r_1' + r_2 = r_3$, $r_1'' + r_2 = r_3$. Daraus folgt $r_1' = r_1''$. Auf diese Art können wir weiter schließen. Damit ist die Folgerung bewiesen.

Aus der Homomorphie der Abbildung und aus der Tatsache, daß K ein Körper ist, folgt ferner, daß die Abbildung $K \to A$ stets einen Körper erschöpft. Deshalb wollen wir annehmen, daß A nicht unnötig groß gewählt ist und also A bei $K \to A$ erschöpft wird.

Folgerung 2. Bei einer homomorphen Abbildung des Körpers K auf A gibt es immer Funktionen, die nicht identisch Null sind und die in Null übergehen.

Es seien r, s, t drei voneinander unabhängige Funktionen aus K. Diese gehen in r', s', t' über. Zwischen r', s', t' besteht dann eine algebraische Gleichung $f(r', s', t') = 0$, da A von der Dimension 2 ist. Wegen der Homomorphie der Abbildung wird dann die Funktion $f(r, s, t)$ aus K, die nicht identisch Null sein kann, auf Null abgebildet.

Folgerung 3. R_1 und R_2 seien zwei Funktionen aus K, die auf Null oder eine von ∞ verschiedene Funktion von A abgebildet werden. Dann wird das Produkt $R_3 = R_1 R_2$ dann und nur dann auf Null abgebildet, wenn einer der Faktoren auf Null abgebildet wird. Dies folgt unmittelbar aus der Homomorphie der Abbildung.

Folgerung 4. R_1 und R_2 seien zwei Funktionen aus K, die beide auf Null abgebildet werden. Dann wird $R_3 = \frac{R_1}{R_2}$ auf eine bestimmte Funktion aus A abgebildet, die auch eine Konstante (einschließlich ∞) sein kann.

Dies folgt aus der Homomorphie der Abbildung, denn R_3 ist eine bestimmte Funktion aus K, wobei der Fall $R_1 = 0$ oder ∞, $R_2 = 0$ oder ∞ ausgeschlossen ist.

3. *Einteilung der homomorphen Abbildungen des Körpers K auf einen algebraischen Körper A der Dimension* 2. Für die homomorphe Abbildung des rationalen Körpers dreier

Veränderlichen K auf einen algebraischen Körper A zweier Veränderlichen lassen sich drei Fälle unterscheiden, je nachdem wie x, y, z abgebildet werden. Diese sind:

Abbildung 1. Art.

Diese liegt dann vor, wenn x, y, z auf drei Funktionen x', y', z' aus A abgebildet werden, von denen zwei voneinander unabhängig sind.

Abbildung 2. Art.

Hierbei werden x, y, z auf drei Funktionen x', y', z' aus A abgebildet, die nur von einer Veränderlichen abhängen.

Abbildung 3. Art.

Diese liegt dann vor, wenn x, y, z auf drei Konstante a, b, c abgebildet werden.

§ 2. Definition der Primteiler der Dimension 2 in K.

Jeder homomorphen Abbildung des Körpers K auf einen Körper A der Dimension 2 wird ein Primteiler zugeordnet, der mit dem gleichen, aber deutschen Buchstaben bezeichnet wird wie der Abbildungskörper. Er wird auch Primteiler der Dimension 2 genannt, da A von der Dimension 2 ist.

Es wird definiert:

1. Eine Funktion R aus K ist durch eine positive, eine negative oder die nullte Potenz des Primteilers $\mathfrak{A}$ teilbar, je nachdem ob bei der Abbildung von K auf A

$$R \to 0,$$
$$R \to \infty,$$
$$R \to e \not\equiv 0, \quad \not\equiv \infty$$

abgebildet wird.

2. Ist r eine Funktion aus K, die die Eigenschaft hat, daß $r \to 0$ und daß für jede Funktion R (außer 0) aus K eine ganze Zahl α, die auch Null sein kann, zu finden ist, so daß

$$\frac{R}{r^\alpha} \to e \not\equiv 0, \ \not\equiv \infty,$$

so sagt man, R ist genau durch die Potenz $\mathfrak{A}^\alpha$ teilbar.

Ist eine homomorphe Abbildung von K auf A gegeben, so ersehen wir aus den Folgerungen 1 bis 4:

Es gibt Funktionen aus K, die durch $\mathfrak{A}$ teilbar sind.

Von jeder Funktion aus K können wir entscheiden, ob sie $\mathfrak{A}$ in positiver, negativer oder nullter Potenz enthält.

Enthalten R_1 und R_2 den Primteiler $\mathfrak{A}$ in irgendeiner Potenz, so können wir entscheiden, ob beide $\mathfrak{A}$ in derselben Potenz enthalten oder welche $\mathfrak{A}$ in größerer Potenz enthält.

Daß es immer eine Funktion r gibt, wird bei der Betrachtung der Einzelfälle gezeigt.

Je nachdem, ob die Abbildung $K \to A$ erster, zweiter oder dritter Art ist, nennen wir den der Abbildung zugeordneten Primteiler erster, zweiter oder dritter Art.

II. Kapitel.
Die Primteiler der Dimension 2.

§ 1. Primteiler 1. Art.

1. *Die Abbildung 1. Art.* Für die Abbildung 1. Art galten folgende Voraussetzungen: Bei der homomorphen Abbildung des Körpers K auf den Körper A der Dimension 2 werden x, y, z auf drei Größen x', y', z' aus A abgebildet, von denen zwei voneinander unabhängig sind.

Zwischen x', y', z' besteht dann eine irreduzible algebraische Gleichung

$$f(x', y', z') = 0.$$

Da die Abbildung homomorph ist, bleiben die Gleichungen zwischen den Funktionen des Körpers K erhalten. Also gehen die rationalen Funktionen $R(x, y, z)$ aus K über in die Funktionen $R(x', y', z')$, wobei noch die Gleichung $f(x', y', z') = 0$ besteht. Dadurch ist aber die Abbildung vollständig bestimmt, denn es läßt sich von jeder Funktion $R(x, y, z)$ sagen, in welche Funktion aus A sie übergeht. Wir können nämlich jede rationale Funktion

$$R(x', y', z') = \frac{G(x', y', z')}{H(x', y', z')}$$

als Quotient zweier teilerfremder Polynome G und H dargestellt denken. Setzen wir hierin $f(x', y', z') = 0$, so treten keine Unbestimmtheiten auf. Jedes $R(x', y', z')$ ist eine ganz bestimmte Funktion des algebraischen Körpers der Dimension 2, der durch

$$f(x', y', z') = 0$$

definiert ist. Wie die Größen des Körpers A bezeichnet werden, ist völlig gleichgültig. Wir können z. B. die Akzente weglassen, also statt x', y', z' jetzt x, y, z schreiben. Da auch umgekehrt durch Nullsetzen eines irreduziblen Polynomes $f(x, y, z)$ eine Abbildung 1. Art des Körpers K erhalten wird, haben wir das Resultat:

Wir erhalten eine Abbildung 1. Art, indem wir ein unzerlegbares Polynom $f(x, y, z)$ gleich Null setzen. Dann wird K homomorph auf den Körper der Dimension 2, der durch $f(x, y, z) = 0$ definiert ist, abgebildet. Auf diese Weise erhalten wir alle Abbildungen 1. Art.

2. *Definition der Primteiler 1. Art.* Ein Primteiler 1. Art wird einer Abbildung 1. Art in der Weise zugeordnet, wie oben (I. Kap., § 2) definiert wurde.

Werden insbesondere x auf die uneigentliche Größe ∞ aus A und y, z auf zwei voneinander unabhängige Größen aus A abgebildet, so lautet die Gleichung, die diesen Primteiler 1. Art definiert,

$$\frac{1}{x} = x' = 0.$$

Analoges gilt für den Fall, daß y oder z auf ∞ aus A abgebildet werden. Diese Abbildungen werden geliefert durch $y' = 0$ und $z' = 0$. Diesen drei Primteilern 1. Art geben wir eine besondere Bezeichnung. Wir nennen sie $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$.

Es ist noch zu zeigen, daß wir genau die Potenz angeben können, in der ein Primteiler 1. Art in irgendeiner Funktion des Körpers enthalten ist. Da sich jede rationale Funktion von x, y, z eindeutig in ein Produkt irreduzibler Faktoren zerlegen läßt, ist eine Funktion aus K dann und nur dann durch eine Potenz von $\mathfrak{A}$ teilbar, wenn sie den Faktor $f(x, y, z)$ enthält. Würde nämlich für $f = 0$ noch ein anderes irreduzibles Polynom $g(x, y, z)$ Null, so folgte hieraus, daß x, y, z nach der Abbildung nur von einer Veränderlichen abhängen. $f(x, y, z)$ ist also eine Funktion aus K, die $\mathfrak{A}$ in möglichst kleiner, also erster Potenz enthält. Für jede Funktion R aus K läßt sich daher eine ganze Zahl α finden, so daß

$$\frac{R}{f^\alpha} \to e \not\equiv 0, \ \not\equiv \infty.$$

R ist dann nach Definition (I. Kap., § 2) genau durch $\mathfrak{A}^\alpha$ teilbar.

3. *Die zugeordnete Funktion eines Primteilers 1. Art.* Der Primteiler 1. Art sei gegeben durch

$$A(x, y, z) = 0.$$

Für die Umgebung der Stelle $S = (x_0, y_0, z_0)$ haben wir die Darstellung

$$A(x, y, z) = \frac{\overline{A}(u, v, w)}{u^\alpha v^\beta w^\gamma},$$

wobei u, v, w Ortsfunktionen der Stelle S sind. $\overline{A}(u, v, w)$ ist eine ganze rationale Funktion von u, v, w und ebenso wie A irreduzibel. Hierbei ist α nur dann von Null verschieden, wenn $x_0 = \infty$. Entsprechendes gilt von β und γ.

$\overline{A}(u, v, w)$ nennen wir die zugeordnete Funktion des Primteilers $\mathfrak{A}$ für die Stelle $S = (x_0, y_0, z_0)$. Zwar soll $\overline{A}$ nur bis auf eine Einheit für $u = v = w = 0$ als Faktor bestimmt sein. Ist $\overline{A}(0, 0, 0) = 0$, so sagen wir, der Primteiler $\mathfrak{A}$ geht durch die Stelle S. Als zugeordnete Funktion nehmen wir dann $\overline{A}(u, v, w)$ selbst. Ist $\overline{A}(0, 0, 0) \neq 0$, also eine Einheit bei S, so soll als zugeordnete Funktion des Primteilers $\mathfrak{A}$ an dieser Stelle die Zahl 1 genommen werden.

Der Primteiler $\mathfrak{L}$ hat überall da die zugeordnete Funktion 1, wo x endlich ist. Wo $x = \infty$ ist, hat $\mathfrak{L}$ die zugeordnete Funktion u. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$.

§ 2. Primteiler 2. Art.

1. *Allgemeines über eine homomorphe Abbildung $K \to A$.* Es sei eine Abbildung $K \to A$ gegeben. Dann gibt es bestimmt eine Funktion, die auf Null abgebildet wird. Eine solche sei ξ. Da ferner A von der Dimension 2 ist, gibt es in A zwei voneinander unabhängige Funktionen η', ζ'. Diese sind Bilder gewisser Funktionen aus K, etwa von η, ζ. Wegen der Homomorphie der Abbildung sind η, ζ auch voneinander unabhängig. Weiter kann gezeigt werden, daß ξ, η, ζ drei unabhängige Größen aus K sind. Denn bestünde eine Gleichung

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

die ganz und irreduzibel angenommen werden kann, so folgte hieraus wegen der Homomorphie der Abbildung

$$F(0, \eta', \zeta') = 0,$$

also entgegen der Annahme eine Gleichung zwischen η' und ζ'. Zu diesem Schlusse wäre man nur dann nicht berechtigt, wenn F durch $\xi = 0$ identisch erfüllt würde. Das ist aber dann und nur dann der Fall, wenn F durch ξ teilbar ist, was wegen der Irreduzibilität von F nicht möglich ist.

ξ, η, ζ können also als unabhängige Veränderliche in K genommen werden. Dann werden die Funktionen aus K algebraische Funktionen von ξ, η, ζ. Da η und ζ bei der Abbildung $K \to A$ unabhängig bleiben, ist $K \to A$ unter den durch $\xi = 0$ definierten Abbildungen enthalten. Das werden wir im folgenden zur Definition der Abbildungen 2. und 3. Art verwenden.

2. *Die Abbildung 2. Art.* Für die Abbildung 2. Art galten folgende Voraussetzungen: Bei der homomorphen Abbildung von K auf einen algebraischen Körper A der Dimension 2 werden x, y, z auf drei Größen x', y', z' aus A abgebildet, die nur von einer Veränderlichen abhängen.

Dann besteht zwischen je zwei der Größen x', y', z' eine irreduzible Gleichung. Diese seien

$$f_1(x', y') = 0, \quad f_2(x', z') = 0, \quad f_3(y', z') = 0. \tag{2}$$

(2) definiert eine irreduzible algebraische Raumkurve, die zur Abkürzung mit

$$a = 0 \tag{3}$$

bezeichnet sei. x', y', z' gehören also einem algebraischen Körper B der Dimension 1 an. Es sei etwa x' nicht konstant. Dann kann x' als unabhängige Veränderliche in B genommen werden.

Bei $K \to A$ werden alle die Funktionen $R(x, y, z)$ auf $R(x', y', z')$ abgebildet, die sich für $a = 0$ bestimmt verhalten. Nur die Funktionen aus K, die für $a = 0$ unbe-

stimmt werden, deren Zähler- und Nennerfläche also durch die Raumkurve $a = 0$ gehen, können auf nicht nur von x' abhängige Funktionen aus A abgebildet werden. Da A von der Dimension 2 ist, muß es mindestens eine Funktion R aus K geben, die auf eine von x unabhängige Funktion t' aus A abgebildet wird, falls eine Abbildung 2. Art überhaupt möglich ist. Da t' und x' unabhängig voneinander sind, können die Funktionen aus A als algebraische Funktionen von t', x' dargestellt werden. Im folgenden lassen wir der Einfachheit halber die Akzente wieder weg.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Abbildung $K \to A$ so auszuführen, daß die Funktionen algebraische Funktionen von t, x werden. Dazu haben wir t und x in K als unabhängige Veränderliche zu wählen. Als dritte Veränderliche in K können wir y nehmen. Das können wir, da x, y, t voneinander unabhängig sind. Denn bestünde eine algebraische Gleichung

$$F(x, y, t) = 0,$$

die irreduzibel angenommen werden kann, so würde wegen der Homomorphie der Abbildung für $a = 0$ hieraus eine algebraische Gleichung zwischen x und t folgen. Das ist nach Voraussetzung über x, t unmöglich. Dieser Schluß wäre nur dann nicht richtig, wenn für $a = 0$ die Koeffizienten aller Potenzen von t in F identisch verschwinden. Dann müßte aber F durch eine positive Potenz von $f_1(x, y)$ teilbar sein, was wegen der Irreduzibilität von F nicht möglich ist. Also können x, y, z als unabhängige Funktionen in K gewählt werden. Dann werden mit

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= y, \\ t &= R = \frac{G(x, y, z)}{H(x, y, z)} \end{aligned} \tag{4}$$

x, y, z algebraische Funktionen von x, y, t. (4) lösen wir in folgender, für die Abbildung $K \to A$ passenden Form auf: Die Stelle (0, 0, 0) sei eine reguläre Stelle der Kurve $a = 0$. Für die Umgebung dieser Stelle gibt es aus (2) für y und z eine endliche Anzahl von Potenzreihenentwicklungen, die nach steigenden Potenzen von x fortschreiten. Es seien

$$\begin{aligned} y &= y_0(x), \\ z &= z_0(x) \end{aligned} \tag{5}$$

je eine Entwicklung aus $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$, die zusammengehören, die also $f_3 = 0$ identisch erfüllen. Da bei der Abbildung $y = y_0$ wird, können wir uns zur Auflösung von (4) auf kleine Werte von $y - y_0$ beschränken, können also aus (4) z nach Potenzen von $y - y_0$ entwickeln. Es kann $(G, H) = 1$ vorausgesetzt werden. Infolgedessen gibt es nur eine endliche Anzahl Entwicklungen

$$\begin{aligned} y &= y_0(x) + (y - y_0), \\ z &= a_0(x) + a_1(x, t)\,(y - y_0)^{\alpha_1} + \cdots. \end{aligned} \tag{6}$$

Hierbei sind die a_i algebraische Funktionen von x, t. Von diesen können nur die zu Abbildungen 2. Art führen, die mit einer positiven Potenz von $y - y_0$ beginnen und bei denen $a_0(x) = z_0(x)$ ist. Eine solche gibt es bestimmt, da $a = 0$ Unbestimmtheitskurve von R ist. Ferner muß einer der Koeffizienten a_i von t abhängen, da sonst x, y, z nicht unabhängig voneinander wären. a_ν sei der erste von t abhängige Koeffizient. Es hat also (6) die Gestalt

$$\begin{aligned} &y = y_0 + (y - y_0), \\ &z = z_0 + a_1(x)\,(y - y_0)^{\alpha_1} + \cdots + a_\nu(x, t)\,(y - y_0)^{\alpha_\nu} + \cdots, \\ &\qquad 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_\nu < \cdots \text{ rationale Zahlen.} \end{aligned} \tag{7}$$

Solcher Entwicklungen gibt es nur eine endliche Anzahl. Eine von diesen führt zu der gegebenen Abbildung $K \to A$. Und zwar in folgender Weise: Mit (7) werden die rationalen

Funktionen von x, y, z Quotienten von Potenzreihen nach einer gebrochenen oder ganzen Potenz von $y - y_0$, deren Koeffizienten algebraische Funktionen von x, t sind. Den so transformierten Körper K wollen wir K' nennen. Die Abbildung $K \to A$ wird dann durch $y = y_0$ erhalten, denn t bleibt unabhängige Veränderliche. Unbestimmtheiten können hierbei nicht mehr auftreten, wenn jede Funktion R nach dem Einsetzen von (7) durch die größtmögliche Potenz von $y - y_0$ gekürzt wird. Beim Einsetzen von (7) in ein Polynom von x, y, z wird der Koeffizient der kleinsten Potenz von $y - y_0$ eine ganze rationale Funktion von a_ν. Er kann von den vorhergehenden, nicht aber von den auf a_ν folgenden abhängen. Da bei der Abbildung $y = y_0$ wird, kann dieselbe Abbildung erhalten werden, wenn (7) nach dem Gliede $a_\nu(y - y_0)^{\alpha_\nu}$ abgebrochen wird, also durch

$$\begin{aligned} &y = y_0 + (y - y_0), \\ &z = z_0 + a_1(x)\,(y - y_0)^{\alpha_1} + \cdots + a_\nu(x, t)\,(y - y_0)^{\alpha_\nu}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

(8) sei Abbildungsgleichung einer Abbildung 2. Art genannt. Umgekehrt wird durch jede Gleichung (8) eine Abbildung 2. Art erhalten, die zu $a = 0$ gehört, bei der also x, y, z in $a = 0$ übergehen. Gleichung (8) kann auch so ausgesprochen werden:

Alle Abbildungen 2. Art werden durch einen Grenzübergang erhalten, bei dem x, y, z in Abhängigkeit von einem Parameter t in die Punkte der Raumkurve $a = 0$ übergehen.

Weiter folgt aus (8), daß die Funktionen aus K auf algebraische Funktionen von x und auf rationale Funktionen von $a_\nu(t)$ abgebildet werden. Der Körper A ist also halbrational oder im Ausnahmefall rational.

Ob wir $a_\nu(x, t)$ als algebraische Funktion von x und t in (8) stehen lassen oder ob wir $a_\nu(x, t) = t'$ setzen und t' als von x unabhängige Veränderliche auffassen, ist lediglich Sache der Bezeichnung und hat auf die Abbildung und den Abbildungskörper keinen Einfluß.

Bisher sind wir immer der Einfachheit halber von der Stelle $(0, 0, 0)$ ausgegangen. Jetzt sei die betrachtete Stelle $S = (a, b, c)$ mit den Ortsfunktionen u, v, w. $v = v_0(u)$ und $w = w_0(u)$ seien Lösungen der Raumkurve $a = 0$ für die Umgebung der Stelle S. Dann läßt sich das Resultat in folgender Form zusammenfassen:

Durch Gleichungen

$$\begin{aligned} &v = v_0 + (v - v_0)\,, \\ &w = w_0 + a_1(u)\,(v - v_0)^{\alpha_1} + \cdots + t(v - v_0)^{\alpha_\nu}\,, \\ &0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_\nu, \text{ rationale Zahlen} \end{aligned} \tag{9}$$

erhalten wir alle Abbildungen 2. Art. Hierbei sind die $a_i(u)$, $w_0(u)$ und $v_0(u)$ algebraische Funktionen von u, und t ist ein von u unabhängiger Parameter. Der Abbildungskörper ist rational oder halbrational.

Es soll nun gezeigt werden, daß jeder halbrationale Körper als Abbildungskörper bei einer Abbildung 2. Art auftreten kann.

Jeder halbrationale Körper k kann definiert werden, indem zu einem algebraischen Körper $\varkappa$ einer Veränderlichen eine zweite unabhängige Veränderliche t adjungiert wird, so daß also $k = (\varkappa, t)$. $\varkappa$ sei gegeben durch die ganze unzerlegbare algebraische Gleichung

$$f(x, w) = 0\,,$$

die in w vom Grade n sei. Es sei $\overline{y}$ eine Größe aus $\varkappa$ vom Relativgrade $n_1 < n$ über x und $\overline{z}$ eine zweite Größe aus $\varkappa$, so daß $\varkappa = (x, w) = (x, \overline{y}, \overline{z})$. Dann bestehen für $\overline{y}$ und $\overline{z}$ die beiden unzerlegbaren Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(x, \overline{y}) &= 0\,, \\ f_2(x, \overline{z}) &= 0\,. \end{aligned}$$

Sind $\overline{y}, \overline{z}$ zusammengehörige Lösungen aus $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$, so geht bei der folgenden Abbildung 2. Art $K = (x, y, z)$ in $k = (\varkappa, t)$ über:

$$z = \overline{z} + t(y - \overline{y}) \quad \text{und} \quad y \to \overline{y}\,.$$

Denn es werden alle Funktionen aus K rationale Funktionen von $x, \overline{y}, \overline{z}, t$, gehören also k an, und der Abbildungskörper kann auch kein echter Unterkörper von k sein, da z. B. x, y, z aus K auf $x, \overline{y}, \overline{z}$ abgebildet werden und man Funktionen aus K angeben kann, die auf t abgebildet werden (vgl. hierzu die unten durchgeführten analogen Überlegungen bei Abbildungen 3. Art). Also ist der Abbildungskörper mit k identisch.

Ein einfaches Beispiel ist folgendes. Es seien

$$f_1(x, \overline{y}) = \overline{y}^2 + x^5 - 1 = 0\,,$$
$$f_2(x, \overline{z}) = \overline{z}^2 + x^7 - 1 = 0\,.$$

Das Geschlecht von $f_1 = 0$ ist 2, das von $f_2 = 0$ ist 4. Infolgedessen ist auch das Geschlecht von $\varkappa$ größer als Null, $k = (\varkappa, t)$ also sicher nicht rational.

Es seien $\overline{y} = \sqrt{1 - x^5}$, $\overline{z} = \sqrt{1 - x^7}$ je eine Lösung aus $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$. Dann wird durch folgende Abbildung 2. Art $K = (x, y, z)$ auf den halbrationalen Körper $k = (\varkappa, t)$ abgebildet, wobei $\varkappa = (x, \overline{y}, \overline{z})$ ist:

$$z = \overline{z} + t(y - \overline{y}) \quad \text{mit} \quad y \to \overline{y}\,.$$

Denn es werden abgebildet

$$x \to x,$$
$$y \to \overline{y},$$
$$z \to \overline{z},$$
$$R = \frac{f_1(x, z)y}{f_2(x, y)z} \to t.$$

Die Funktion R kann man allgemein ähnlich bestimmen wie unten die entsprechende Funktion R bei der Abbildung 3. Art. Sie ergibt sich allgemein aus $f_1(x, y)$, $f_2(x, z)$, x, y und z wie in diesem Beispiel.

R sei jetzt eine beliebige Funktion aus K. Ist $a = 0$ Unbestimmtheitskurve der Funktion R und wird bei einer Abbildung 2. Art, bei der x, y, z in $a = 0$ übergehen, R auf eine nicht nur von x abhängige Funktion aus A abgebildet, so wollen wir diese Abbildung ausgezeichnet in bezug auf R nennen. Es gibt nur eine endliche Anzahl ausgezeichneter Abbildungen 2. Art in bezug auf eine Funktion R. R sei gegeben durch $R = \frac{G}{H}$, wobei $(G, H) = 1$ vorausgesetzt werden kann. R hat als Unbestimmtheitskurven den vollständigen Schnitt der Flächen $G = 0$ und $H = 0$. Dieser möge in die n irreduziblen Raumkurven $a_1, \ldots, a_n$ zerfallen. Dazu können noch einige der uneigentlichen Geraden l_1, l_2, l_3 als Unbestimmtheitskurven von R kommen. Wenn eine Abbildung 2. Art ausgezeichnet in bezug auf R sein soll, so muß x, y, z in die Punkte einer dieser endlich vielen Unbestimmtheitskurven von R übergehen. Zu je einer dieser irreduziblen Raumkurven a_i und l_i gibt es nur eine endliche Anzahl ausgezeichneter Abbildungen 2. Art in bezug auf R, da es nur eine endliche Anzahl zu a_i und l_i gehörender Entwicklungen (7) gibt.

3. *Definition der Primteiler 2. Art.* Ein Primteiler 2. Art wird in der Weise, wie oben (I. Kap., § 2) definiert wurde, einer Abbildung 2. Art zugeordnet. Er sei mit einem kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet.

Es ist nun noch zu zeigen, daß von jeder Funktion R angegeben werden kann, in genau welcher Potenz sie einen Primteiler 2. Art enthält.

Der Primteiler 2. Art sei gegeben durch

$$(10)\qquad \begin{aligned} v &= v_0 + (v - v_0), \\ w &= w_0 + a_1(v - v_0)^{\frac{\alpha_1}{\varepsilon}} + \cdots + t(v - v_0)^{\frac{\alpha_\nu}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Dabei sind die α_i und ε ganze Zahlen, wobei ε so klein wie möglich gewählt sei.

Mit (10) kann jede Funktion R aus K in der Form geschrieben werden:

$$(11)\qquad R = (v - v_0)^{\frac{\alpha}{\varepsilon}} E(v - v_0).$$

Hieraus folgt, daß eine Funktion dann und nur dann durch $\mathfrak{a}$ teilbar wird, wenn $\alpha \neq 0$ ist. Da die kleinste positive Potenz von $v - v_0$, die überhaupt auftreten kann, $(v - v_0)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ist, definieren wir:

R ist genau durch die Potenz α des Primteilers 2. Art $\mathfrak{a}$ teilbar, wenn R die Gestalt (11) hat.

Daß es eine Funktion des Körpers gibt, die genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{a}$ teilbar ist, sieht man durch analoge Überlegungen, wie sie unten für die Teilbarkeit durch einen Primteiler 3. Art angestellt werden.

§ 3. Primteiler 3. Art.

1. *Die Abbildung 3. Art.* Für die Abbildung 3. Art galten folgende Voraussetzungen: Bei der homomorphen Abbildung des Körpers K auf einen Körper A der Dimension 2 gehen x, y, z in Konstante a, b, c über.

Wenn in diesem Falle überhaupt eine homomorphe Abbildung des Körpers K auf einen Körper A der Dimension 2 möglich ist, so müssen alle Funktionen, die für $x = a$, $y = b$, $z = c$ einen bestimmten Wert annehmen, auf die so bestimmten Konstanten abgebildet werden. Dies folgt aus der Homomorphie der Abbildung. Nur die für die Stelle (a, b, c) unbestimmten Funktionen aus K können auf nichtkonstante Funktionen aus A abgebildet werden. Für das Folgende nehmen wir der Einfachheit halber an, daß (a, b, c) die Stelle $(0, 0, 0)$ sei, die wir als Stelle O bezeichnen wollen.

Da auf einen Körper A der Dimension 2 abgebildet wird, gibt es zwei Funktionen s und t aus K, die auf voneinander unabhängige Funktionen aus A abgebildet werden, die wir ebenfalls s und t nennen wollen. s und t wählen wir als unabhängige Veränderliche in K. Als dritte unabhängige Veränderliche kann x genommen werden, da s, t, x wegen der Homomorphie der Abbildung bestimmt unabhängig voneinander sind. Da s und t bei $K \to A$ unabhängig bleiben, so ist diese Abbildung unter den durch $x = 0$ definierten enthalten.

Es sei

$$(12)\qquad \begin{aligned} s = R_1 &= \frac{G_1(x, y, z)}{H_1(x, y, z)}, \\ t = R_2 &= \frac{G_2(x, y, z)}{H_2(x, y, z)}, \end{aligned}$$

wobei angenommen werden kann

$$(13)\qquad (G_1, H_1) = 1, \quad (G_2, H_2) = 1.$$

Dann werden mit

$$(14)\qquad \begin{aligned} x &= x, \\ s &= R_1(x, y, z), \\ t &= R_2(x, y, z) \end{aligned}$$

x, y, z algebraische Funktionen von x, s, t.

Da x bei der Abbildung $K \to A$ nach Null geht, kann x in (14) auf kleine Werte beschränkt werden. Dann kann (14) so aufgelöst werden, daß y und z nach steigenden Potenzen von x entwickelt werden. Hierbei sind die Koeffizienten algebraische Funktionen von s und t. So ergibt sich eine endliche Anzahl Paare von Potenzreihen

$$\begin{aligned} y &= \mathfrak{P}(x; s, t)\,, \\ z &= \mathfrak{Q}(x; s, t)\,, \end{aligned} \tag{15}$$

die zusammengehören, d. h. die zugleich (14) erfüllen. Von diesen können nur die auf gewünschte Abbildungen 3. Art führen, die mit positiven Potenzen von x beginnen und deren Koeffizienten von s, t abhängen.

(15) sei eine brauchbare Entwicklung. Die Abbildung, bei der x, y, z Null werden und R_1, R_2 auf s, t abgebildet werden, erhalten wir folgendermaßen: Mit (15) transformieren wir die Funktionen aus K, kürzen jede durch die größtmögliche Potenz von x und setzen dann $x = 0$. Es gibt nur eine endliche Anzahl Entwicklungen (15). Von diesen führt eine zu der gegebenen Abbildung $K \to A$. Umgekehrt liefert auch jedes Gleichungspaar (15) eine Abbildung 3. Art, wenn y und z mit positiven Potenzen von x beginnen und die Koeffizienten algebraische Funktionen zweier unabhängiger Parameter s, t sind, so daß x, y, z unabhängig sind, oder damit gleichbedeutend

$$\frac{D(y, z)}{D(s, t)} \not\equiv 0$$

ist. Damit haben wir vorläufig das Resultat:

Wir erhalten alle Abbildungen 3. Art durch einen Grenzübergang, bei dem x, y, z in Abhängigkeit von zwei unabhängigen Parametern s, t gleichzeitig nach Null gehen.

Es soll nun weiter gezeigt werden, daß die Potenzreihen (15) bei bestimmten endlichen Gliedern abgebrochen werden können, ohne die Abbildung $K \to A$ zu beeinflussen. Es werden also alle Abbildungen 3. Art durch Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned} y &= b_1 x^{\beta_1} + \cdots + b_\mu x^{\beta_\mu}\,, \\ z &= c_1 x^{\gamma_1} + \cdots + c_\nu x^{\gamma_\nu} \end{aligned} \tag{16}$$

erhalten. Ferner soll gezeigt werden, daß alle Abbildungsgleichungen auf eine Normalform folgender Gestalt gebracht werden können

$$\begin{aligned} y &= b_1 x^{\beta_1} + \cdots + b_{\mu-1} x^{\beta_{\mu-1}} + s\, x^{\beta_\mu}\,, \\ z &= c_1 x^{\gamma_1} + \cdots + c_{\nu-1} x^{\gamma_{\nu-1}} + t\, x^{\gamma_\nu}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Hierbei sind die b_i Konstante, während die c_i algebraische Funktionen von s allein sind.

2. *Ausgezeichnete Abbildungen 3. Art.* Da es bei jeder Abbildung 3. Art zwei Funktionen $s = R_1$ und $t = R_2$ gibt, die auf unabhängige Größen aus A abgebildet werden, gehen wir gleich von der folgenden Aufgabe aus: R_1 und R_2 seien zwei Funktionen mit der gemeinsamen Unbestimmtheitsstelle $S = (0, 0, 0)$. Es sollen alle Abbildungen 3. Art aufgestellt werden, bei denen x, y, z auf Null und R_1 und R_2 auf zwei voneinander unabhängige Funktionen abgebildet werden. Solche Abbildungen sollen ausgezeichnet in bezug auf R_1, R_2 und zur Stelle O gehörig genannt werden.

Aus den soeben angestellten Überlegungen folgt, daß wir alle ausgezeichneten Abbildungen erhalten, indem wir aus

$$\begin{aligned} s &= R_1, \\ t &= R_2 \end{aligned} \tag{18}$$

alle Paare von Potenzreihen (15) errechnen und mit diesen dann den Grenzübergang $x \to 0$ ausführen.

a) *Voraussetzungen über R_1 und R_2.* Zunächst muß notwendig vorausgesetzt werden, daß R_1 und R_2 voneinander unabhängig sind, da sonst wegen der Homomorphie der Ab-

bildung auch s und t voneinander abhängig wären. Es dürfen daher nicht alle drei Funktionaldeterminanten

$$\frac{D(R_1, R_2)}{D(x, y)}, \quad \frac{D(R_1, R_2)}{D(x, z)}, \quad \frac{D(R_1, R_2)}{D(y, z)} \tag{19}$$

identisch verschwinden.

Es muß weiter vorausgesetzt werden, daß keine der drei Funktionaldeterminanten (19) identisch verschwindet. Denn verschwindet etwa die letzte identisch, während die beiden ersten nicht identisch Null sind, so besteht eine algebraische Gleichung zwischen R_1 und R_2

$$f(R_1, R_2; x) = 0,$$

deren Koeffizienten rational von x abhängen. Wegen der Homomorphie der Abbildung und da $f(R_1, R_2; x)$ irreduzibel vorausgesetzt werden kann, folgt hieraus eine Gleichung

$$f(s, t) = 0.$$

Es muß daher vorausgesetzt werden, daß für R_1 und R_2 gilt

$$\frac{D(R_1, R_2)}{D(x, y)} \not\equiv 0, \quad \frac{D(R_1, R_2)}{D(x, z)} \not\equiv 0, \quad \frac{D(R_1, R_2)}{D(y, z)} \not\equiv 0. \tag{20}$$

b) *Berechnung der Potenzreihen* (15). Zur Berechnung der Potenzreihen (15) verfahren wir folgendermaßen: Aus (12) oder

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, s) &= G_1 - sH_1 = 0, \\ F_2(x, y, z, t) &= G_2 - tH_2 = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

erhalten wir durch Elimination von z und y die ganzen algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(x, y; s, t) &= 0, \\ f_2(x, z; s, t) &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

aus denen die Potenzreihen (15) folgen, indem y und z, etwa nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten, nach steigenden Potenzen von x entwickelt werden. Von diesen gehören immer die zu einem Paare (15) y_i, z_k zusammen, die beide Gleichungen (21) erfüllen. Die Zusammengehörigkeit kann schon bei der Berechnung so festgestellt werden, daß man y_i aus $f_1 = 0$ bestimmt. Dann erhält man die zu y_i gehörigen z_k, indem man z nach Potenzen von x gleichzeitig aus beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} F_1(x, y_i; z, s) &= 0, \\ F_2(x, y_i, z, t) &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

entwickelt.

Von diesen so erhaltenen Paaren müssen alle die weggelassen werden, bei denen nicht beide Potenzreihen mit einer positiven Potenz von x beginnen, und diejenigen, deren Koeffizienten nicht von s, t abhängen. Letzteres kann es geben, da die Flächen $G_1 = 0$, $H_1 = 0$, $G_2 = 0$, $H_2 = 0$ gemeinsame Schnittkurven haben können, deren Projektionen als Faktoren von f_1, f_2 erscheinen. Im folgenden wollen wir daher unter f_1 und f_2 stets nur den von s, t abhängigen Teil verstehen.

Damit haben wir das Ergebnis:

Aus (22), (23) erhalten wir eine endliche Anzahl Paare von Potenzreihen nach steigenden Potenzen von x

$$\begin{aligned} y_i &= \mathfrak{P}_i(x; s, t), \\ z_k &= \mathfrak{Q}_k(x; s, t), \end{aligned} \tag{24}$$

die mit einer positiven Potenz von x beginnen und deren Koeffizienten algebraische Funktionen von s, t sind. Jedes Paar (24) nennen wir ausgezeichnete Entwicklung in bezug auf R_1, R_2, da jedes eine ausgezeichnete Abbildung 3. Art in bezug auf R_1, R_2

definiert, die zur Stelle O gehört, und wir erhalten so alle ausgezeichneten Abbildungen 3. Art in bezug auf R_1, R_2 und O.

c) *Charakteristische Glieder in bezug auf* R_1, R_2. Es soll nun gezeigt werden, daß jede ausgezeichnete Entwicklung bei endlichen Gliedern abgebrochen werden kann, ohne daß die Abbildung $K \to A$ dadurch beeinflußt wird.

Die ausgezeichnete Entwicklung sei gegeben durch

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 x^{\beta_1} + b_2 x^{\beta_2} + \cdots, \\ z_1 &= c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_2} + \cdots. \end{aligned} \tag{25}$$

Da jede ausgezeichnete Entwicklung lediglich eine andere Darstellung der Funktionen aus K ist und x, y, z voneinander unabhängig sind, so ist für jede ausgezeichnete Entwicklung

$$\frac{D(y_i, z_k)}{D(s, t)} \not\equiv 0.$$

Setzen wir daher (25) in R_1 und R_2 ein, so wird G_1, H_1, G_2, H_2 von (25) nicht identisch erfüllt. Es bleibt daher in jedem dieser Polynome eine kleinste positive Potenz von x mit von Null verschiedenen Koeffizienten stehen. Es sei mit (25)

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{g_1 x^{a_1} + x^{\varepsilon_1} E(x)}{h_1 x^{b_1} + x^{\delta_1} E(x)}, & \varepsilon_1 > a_1, \quad \delta_1 > b_1, \\ R_2 &= \frac{g_2 x^{a_2} + x^{\varepsilon_2} E(x)}{h_2 x^{b_2} + x^{\delta_2} E(x)}, & \varepsilon_2 > a_2, \quad \delta_2 > b_2. \end{aligned}$$

Da (25) Lösung von (21) ist, so muß sein

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, \quad & a_2 &= b_2, \\ \frac{g_1}{h_1} &= s, \quad & \frac{g_2}{h_2} &= t. \end{aligned}$$

Wir können durch die entsprechenden Potenzen von x kürzen und erhalten

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{g_1 + x^{\varepsilon_1} E(x)}{h_1 + x^{\delta_1} E(x)}, & \varepsilon_1 > 0, \ \delta_1 > 0, \\ R_2 &= \frac{g_2 + x^{\varepsilon_2} E(x)}{h_2 + x^{\delta_2} E(x)}, & \varepsilon_2 > 0, \ \delta_2 > 0. \end{aligned}$$

Da y_1 und z_1 nach steigenden Potenzen von x fortschreiten, können die auf ein bestimmtes Glied $b_i x^{\beta i}$ aus y_1 und $c_k x^{\gamma k}$ aus z_1 folgenden Glieder weder Einfluß auf g_1, h_1 haben, noch kleinere Potenzen als x^{a_1} liefern. Diese Glieder wollen wir charakteristisch in bezug auf R_1 nennen. Diese Bezeichnung wählen wir deshalb, weil wir die ausgezeichnete Entwicklung (25) bei den charakteristischen Gliedern abbrechen können und damit den Grenzübergang $x \to 0$ ausführen können, ohne die Abbildung von R_1 zu beeinflussen.

Ebenso gibt es in bezug auf R_2 charakteristische Glieder mit der entsprechenden Bedeutung.

$b_\mu x^{\beta\mu}$ und $c_\nu x^{\gamma\nu}$ seien die letzten charakteristischen Glieder in bezug auf R_1 und R_2. Dann erhalten wir die Abbildung $R_1 \to s$, $R_2 \to t$, indem wir statt (25) die Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 x^{\beta_1} + \cdots + b_\mu x^{\beta_\mu}, \\ z_1 &= c_1 x^{\gamma_1} + \cdots + c_\nu x^{\gamma_\nu} \end{aligned} \tag{26}$$

benutzen und $x = 0$ setzen. Wir erhalten so aus jeder ausgezeichneten Entwicklung eine Abbildungsgleichung (26), die wir ausgezeichnete Abbildungsgleichung in bezug auf R_1, R_2 nennen wollen, da für sie ebenso wie für die entsprechende ausgezeichnete Entwicklung $R_1 \to s$, $R_2 \to t$ gilt.

Es soll nun ein Weg angegeben werden, um bei der Berechnung der ausgezeichneten Entwicklung die charakteristischen Glieder zu erkennen.

Zunächst wollen wir sehen, welche Form ein Polynom $g(x, y)$ annehmen kann, wenn $y = y_1$ eingesetzt wird. Die Koeffizienten b_i lassen wir zunächst unbestimmt. Wir ordnen dann $g(x, y_1)$ nach steigenden Potenzen von x. Es können zunächst Potenzen von x vorkommen, die Zahlen als Koeffizienten haben, die nämlich aus explizit in $g(x, y)$ vorkommenden Potenzen von x stammen. Die erste Potenz von x, deren Koeffizient von den b_i abhängt, kann nur allein von b_1 abhängen. Denn angenommen, es käme außer b_1 noch b_2 oder ein folgender vor, so müßte die zu b_2 gehörige Potenz von x aus einem Gliede $x^k y^l$ stammen. Die kleinste hieraus hervorgehende Potenz, die b_2 im Koeffizienten hat, ist

$$l b_1^{l-1} b_2 x^{(l-1)\beta_1+\beta_2+k} .$$

Das ist aber nicht die kleinste aus $x^k y^l$ stammende Potenz, deren Koeffizient von den b_i abhängt. Kleiner ist die Potenz

$$b_1^l x^{l\beta_1+k} .$$

Also kann die kleinste Potenz, deren Koeffizient von den b_i abhängt, nur eine ganze rationale Funktion von b_1 sein. So kann man weiter schließen. Der Koeffizient der nächsthöheren Potenz kann außer von b_1 nur von b_2, nicht aber von b_3 und folgenden abhängen. Allgemein können wir sagen: Die Potenz, deren Koeffizient als erster von b_k abhängt, ist bestimmt kleiner als die, deren Koeffizient von b_{k+1} abhängt. Daher können wir die Potenzen in $g(x, y_1)$ folgendermaßen der Größe nach numerieren: Allen Potenzen, die b_1 noch nicht enthalten, geben wir die Nummer 0, allen, die b_2 noch nicht enthalten, die Nummer 1 und so fort. Dann denken wir die Werte für die b_i eingesetzt. Es können dabei eine Anzahl Potenzen von x wegfallen, die Numerierung bleibt aber dieselbe.

Die zu y_1 gehörige Entwicklung z_1 ist eine der beiden Gleichungen (23) gemeinsamen Lösungen z_k. $F_1(x, y, z, s)$ und $F_2(x, y, z, t)$ denken wir als Polynome in z geschrieben. Die Koeffizienten der Potenzen von z und das von z unabhängige Glied sind Polynome in x, y. In diese Polynome haben wir $y = y_1$ einzusetzen. Wir denken nach Potenzen von x geordnet und in der soeben angegebenen Art numeriert. Ferner heben wir das in F_1 und F_2 vorkommende s und t hervor, indem wir es zunächst mit s' und t' bezeichnen. Wir entwickeln also z_1 gleichzeitig aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1, z, s') &= G_1 - s' H_1 = 0 , \\ F_2(x, y_1, z, t') &= G_2 - t' H_2 = 0 . \end{aligned} \tag{27}$$

Die Entwicklung der Reihe

$$z_1 = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_2} + \cdots$$

besteht im wesentlichen darin, daß zunächst γ_1 so bestimmt wird, daß in F_1 und F_2 kleinste gleiche Potenzen von x entstehen. Dann wird c_1 so bestimmt, daß der Koeffizient dieser kleinsten Potenz von x verschwindet. Wir erhalten für γ_1 und c_1 aus $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ denselben Wert; denn andere Entwicklungen lassen wir sofort weg. In dieser Art geht die Entwicklung weiter. Es sei $c_\varrho x^{\gamma_\varrho}$ das erste Glied, in dessen Koeffizienten t' vorkommt. Ein von s' abhängiger Koeffizient sei bisher noch nicht vorgekommen. Die Bedingungsgleichung für c_ϱ aus $F_2 = 0$ hat dann folgende Form:

$$g_\varrho - t' h_\varrho = 0 ,$$

wobei weder g_ϱ noch h_ϱ Null sein kann, wenn der Wert für c_ϱ eingesetzt wird. g_ϱ und h_ϱ sind ganze rationale Funktionen der c_1 bis c_ϱ und der Koeffizienten der oben numerierten Potenzen von x. Es sei in den Bedingungsgleichungen der c_1 bis c_ϱ bisher als höchste die Nummer λ vorgekommen. Die bei der Bestimmung von c_ϱ in $F_2 = 0$ aufgetretene kleinste

Potenz sei $(g_\varrho - t' h_\varrho)x^k$. Alle auf $c_\varrho x^{\gamma_\varrho}$ und $b_\lambda x^{\beta_\lambda}$ folgenden Glieder aus z_1 und y_1 liefern stets Potenzen von x, deren Exponent größer als k ist, ganz gleich, wie die Koeffizienten und Exponenten sonst beschaffen sind, es muß nur $\beta_{\lambda+1} > \beta_\lambda$ und $\gamma_{\varrho+1} > \gamma_\varrho$ sein. Da $g_\varrho \not\equiv 0$ und $h_\varrho \not\equiv 0$ ist, so sind $g_\varrho x^k$ und $h_\varrho x^k$ die kleinsten Potenzen in Zähler und Nenner von R_2, deren Koeffizienten ungleich Null sind, wenn (25) in R_2 eingesetzt wird. Alle auf $b_\lambda x^{\beta_\lambda}$ und $c_\varrho x^{\gamma_\varrho}$ folgenden Glieder aus y_1, z_1 liefern im Zähler und Nenner von R_2 höhere als die k-te Potenz von x, haben daher weder auf g_ϱ noch auf h_ϱ einen Einfluß. Es wird

$$R_2 = \frac{g_\varrho + x^{\varepsilon_1} E(x)}{h_\varrho + x^{\delta_1} E(x)}, \qquad \varepsilon_1 > 0, \quad \delta_1 > 0.$$

Es wird daher unabhängig von den folgenden Gliedern R_2 auf t für $x = 0$ abgebildet, da

$$\frac{g_\varrho}{h_\varrho} = t$$

ist. Also sind $b_\lambda x^{\beta_\lambda}$ und $c_\varrho x^{\gamma_\varrho}$ die charakteristischen Glieder in bezug auf R_2.

Wir setzen nun $t = t'$ und entwickeln z weiter aus $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$. Von den folgenden Gliedern sei c_ν der erste Koeffizient, der von s' abhängt. Dann hat die Bedingungsgleichung für c_ν aus $F_1 = 0$ die Gestalt

$$g_\nu - s' h_\nu = 0,$$

wobei $g_\nu \not\equiv 0$, $h_\nu \not\equiv 0$ ist, wenn der Wert für c_ν eingesetzt wird. In den Bedingungsgleichungen von c_1 bis c_ν sei als höchste die Nummer μ vorgekommen. Dann schließen wir wie soeben, daß alle auf $b_\mu x^{\beta_\mu}$ und $c_\nu x^{\gamma_\nu}$ folgenden Glieder keinen Einfluß auf die Abbildung von R_1 haben. Es wird unabhängig von den folgenden Gliedern R_1 auf s abgebildet, wenn wir jetzt $s' = s$ setzen. Also sind $b_\mu x^{\beta_\mu}$ und $c_\nu x^{\gamma_\nu}$ die charakteristischen Glieder in bezug auf R_1.

Daß wir angenommen haben, daß zunächst charakteristische Glieder in bezug auf R_2, dann in bezug auf R_1 auftreten, ist natürlich eine willkürliche Annahme. Es könnte auch umgekehrt sein oder die charakteristischen Glieder von R_1, R_2 können ganz oder zum Teil zusammenfallen.

Die auf die letzten charakteristischen Glieder folgenden können in bezug auf R_1 und R_2 vollkommen willkürlich angenommen werden. Es soll nun gezeigt werden, daß diese überhaupt keinen Einfluß auf die Abbildung des ganzen Körpers haben.

Hierzu denken wir zunächst die Koeffizienten $b_{\mu+1}, \ldots, c_{\nu+1}, \ldots$ als unbestimmte Größen geschrieben und dann

$$y_1 = b_1 x^{\beta_1} + \cdots,$$
$$z_1 = c_1 x^{\gamma_1} + \cdots$$

in alle Funktionen aus R eingesetzt. Angenommen, es gäbe eine Funktion F (es genügt, eine ganze rationale Funktion zu betrachten) aus K, in der der Koeffizient der kleinsten Potenz von x von einem der $b_{\mu+1}, \ldots, c_{\nu+1}, \ldots$ abhängt, etwa von $b_{\mu+i}$, so denken wir $b_{\mu+i} = r$ als dritte unabhängige Veränderliche gesetzt. Hat dann F die Gestalt

$$F = a(r) x^{\frac{\alpha}{\beta}} + \cdots,$$

so wird die Funktion

$$\frac{F^\beta}{x^\alpha} \quad \text{auf} \quad a(r)^\beta,$$

also auf eine von s und t unabhängige Funktion abgebildet. Wir hätten damit eine homomorphe Abbildung des Körpers K auf einen Körper K dreier unabhängiger Veränder-

lichen, wobei x, y, z auf 0 abgebildet werden. Das ist aber unmöglich. Denn wählen wir $s, t, \bar{r} = \dfrac{F^\beta}{x^\alpha}$ als unabhängige Veränderliche in K, so werden mit

$$s = R_1,\ t = R_2,\ \bar{r} = \frac{F^\beta}{x^\alpha} \tag{28}$$

x, y, z algebraische Funktionen von $s, t, \bar{r}$. Aus (28) erhalten wir durch Elimination die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(x, s, t, \bar{r}) &= 0\,, \\ f_2(y, s, t, \bar{r}) &= 0\,, \\ f_3(z, s, t, \bar{r}) &= 0\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Wegen der Homomorphie der Abbildung bleiben diese Gleichungen erhalten. Da x, y, z Null werden bei $K \to \bar{K}$, folgen aus (29) algebraische Gleichungen zwischen $s, t, \bar{r}$. Also können $s, t, \bar{r}$ nicht unabhängig bleiben, und der hier angenommene Fall kann nicht eintreten. Damit ist gezeigt, daß auf die letzten charakteristischen Glieder folgende keinen Einfluß auf die gesamte Abbildung $K \to A$ haben können. Ebenso kann man beweisen, daß auch zwischen auf $b_\mu x^{\beta_\mu}$ und $c_\nu x^{\gamma_\nu}$ folgenden Gliedern eingefügte keinen Einfluß auf $K \to A$ haben.

Das Ergebnis können wir jetzt zusammenfassen:

Die endliche Anzahl ausgezeichneter Abbildungen 3. Art in bezug auf R_1, R_2, die zur Stelle O gehören, können durch Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= b_1 x^{\beta_1} + \cdots + b_\lambda x^{\beta_\lambda} + \cdots + b_\mu x^{\beta_\mu}\,, \\ \bar{z}_1 &= c_1 x^{\gamma_1} + \cdots + c_\varrho x^{\gamma_\varrho} + \cdots + c_\nu x^{\gamma_\nu} \end{aligned} \tag{30}$$

definiert werden. Diese werden erhalten, indem die ausgezeichneten Entwicklungen nach den letzten charakteristischen Gliedern abgebrochen werden. In (30) kann man angeben, welche Glieder charakteristisch in bezug auf R_1 und R_2 sind. Da von den ausgezeichneten Entwicklungen kein Polynom $f(x, y, z)$ identisch erfüllt wird, gilt dies auch von (30), d. h. es ist

$$\frac{D(\bar{y}_1, \bar{z}_1)}{D(s, t)} \not\equiv 0. \tag{31}$$

Ferner sind

$$0 < \beta_1 < \cdots < \beta_\mu,\ 0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_\nu$$

rationale Zahlen.

d) *Eine Normalform der Abbildungsgleichung.* Eine Abbildung 3. Art sei gegeben durch

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 x^{\beta_1} + \cdots + b_\sigma x^{\beta_\sigma} + \cdots + b_\mu x^{\beta_\mu}\,, \\ z_1 &= c_1 x^{\gamma_1} + \cdots + c_\nu x^{\gamma_\nu}\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Hierbei seien b_μ und c_ν die letzten charakteristischen Glieder. Mit (32) mögen R_1 auf s und R_2 auf t abgebildet werden. b_σ sei der erste von s, t abhängige Koeffizient aus y_1. Dann gibt es eine Funktion $R_3 = \dfrac{G_3(x, y)}{H_3(x, y)}$, die allein von x, y abhängt und auf eine Potenz von b_σ, etwa auf b_σ^α abgebildet wird. Wir setzen $b_\sigma^\alpha = r$. Es kann nicht zugleich eine Gleichung zwischen b_σ, s und eine zwischen b_σ, t bestehen. Wir wollen, um einen bestimmten Fall zu haben, annehmen, daß zwischen b_σ und t keine Gleichung besteht. In diesem Falle sind b_μ, c_ν die charakteristischen Glieder von R_2. Dann ist (32) auch unter den endlich vielen ausgezeichneten Abbildungen 3. Art, die zu R_2, R_3 gehören,

enthalten. D. h. wir erhalten z_1 auch als gemeinsame Lösung von

$$(33)\qquad \begin{aligned} F_2(x, y, z, t) &= G_2 - tH_2 = 0\,, \\ F_3(x, y, r) &= G_3 - rH_3 = 0\,. \end{aligned}$$

Da für die Abbildung von R_3 die auf b_σ folgenden Glieder unwesentlich sind, liegt es nahe, sie willkürlich gleich Null zu setzen und dann mit

$$\overline{y}_1 = b_1 x^{\beta_1} + \cdots + b_\sigma x^{\beta_\sigma}$$

aus $F_2(x, \overline{y}_1, z, t) = 0$

$$\overline{z}_1 = c_1' x^{\gamma_1} + \cdots + c_\nu' x^{\gamma_\nu}$$

so zu bestimmen, daß R_2 auf t abgebildet wird. Dann wird mit

$$(34)\qquad \begin{aligned} \overline{y}_1 &= b_1 x^{\beta_1} + \cdots + b_\sigma x^{\beta_\sigma}, \\ \overline{z}_1 &= c_1' x^{\gamma_1} + \cdots + c_\nu' x^{\gamma_\nu} \end{aligned}$$

R_2 auf t und R_3 auf r abgebildet. (34) hat eine besonders einfache Gestalt. Die Koeffizienten b_1 bis $b_{\sigma-1}$ sind reine Zahlen, nur b_σ hängt von r ab, und die Koeffizienten c_1' bis $c_{\nu-1}'$ sind, soweit sie überhaupt von r, t abhängen, algebraische Funktionen von b_σ, also von r. Nur c_ν', das für R_2 charakteristisch ist, hängt von t ab. Das folgt aus den Überlegungen unter **2** c) in diesem Paragraphen. Wählen wir $b_\sigma = \sigma$ und $c_\nu' = \tau$ als neue Veränderliche, so nimmt (34) die Form an:

$$(35)\qquad \begin{aligned} \overline{y}_1 &= b_1 x^{\beta_1} + \cdots + \sigma x^{\beta_\sigma}, \\ \overline{z}_1 &= c_1(\sigma) x^{\gamma_1} + \cdots + c_{\nu-1}(\sigma) x^{\gamma_\nu - 1} + \tau x^{\gamma_\nu}. \end{aligned}$$

(35) wollen wir die Normalform der Abbildungsgleichung nennen. Auf diese können wir jede Abbildungsgleichung 3. Art bringen, wenn wir noch zeigen, daß (35) dieselbe Abbildung wie (32) liefert.

Das zeigen wir folgendermaßen: In $\overline{y}_1$ lassen wir die Koeffizienten $b_{\sigma+1}, \ldots, b_\mu$ unbestimmt und berechnen aus

$$F_2(x, y_1, z, t) = 0$$

z_1 so, daß R_2 auf t abgebildet wird. Es sei dann

$$(36)\qquad \begin{aligned} y_1 &= b_1 x^{\beta_1} + \cdots + b_\sigma x^{\beta_\sigma} + \cdots + b_\mu x^{\beta_\mu}, \\ z_1 &= \bar{c}_1 x^{\gamma_1} + \cdots + \bar{c}_\nu x^{\gamma_\nu}. \end{aligned}$$

Für (36) wird dann R_2 auf t und R_3 auf r abgebildet und $\bar{c}_\nu$, b_μ sind als letzte charakteristische Glieder charakteristisch für R_2 und für die Abbildung des ganzen Körpers. Hätten die unbestimmten Größen $b_{\sigma+1}, \ldots, b_\mu$ einen Einfluß auf die Abbildung $K \to A$, so könnte man, da r und t unabhängig sind, hieraus einen Widerspruch wie unter **2** c) herleiten. Also können $b_{\sigma+1}, \ldots, b_\mu$ völlig willkürlich angenommen werden. Wählen wir insbesondere $b_{\sigma+1} = \cdots = b_\mu = 0$, so geht (36) in (34) über, das also dieselbe Abbildung wie (32) definiert, da wir für $b_{\sigma+1}, \ldots, b_\mu$ z. B. auch die Werte aus (32) wählen können.

e) *Der Abbildungskörper.* Eine Abbildung 3. Art sei in der Normalform gegeben

$$(37)\qquad \begin{aligned} y_1 &= b_1 x^{\beta_1} + \cdots + s x^{\beta_\mu}, \\ z_1 &= c_1 x^{\gamma_1} + \cdots + c_{\nu-1} x^{\gamma_\nu - 1} + t x^{\gamma_\nu}. \end{aligned}$$

Beim Einsetzen von (37) werden die Funktionen aus K rationale Funktionen von s, t und der Koeffizienten c_i, die algebraisch von s allein abhängen. Infolgedessen ist der Abbildungskörper A halbrational oder im Ausnahmefall rational. Es lassen sich leicht Beispiele bilden, bei denen A halbrational ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß bei einer Abbildung 3. Art des Körpers $K = (x, y, z)$ jeder halbrationale Körper als Abbildungskörper auftreten kann.

Jeder halbrationale Körper kann so definiert werden, daß zu einem algebraischen Körper einer Veränderlichen $\varkappa$ eine zweite unabhängige Veränderliche t adjungiert wird,

$k = (\varkappa, t)$. $\varkappa$ sei gegeben durch die ganze irreduzible Gleichung

$$f(s, r) = a_0(s) r^n + \cdots + a_n(s) = 0,$$

wobei die $a_i(s)$ als Polynome in s angenommen werden können.

K wird dann z. B. durch folgende Abbildung 3. Art auf k abgebildet:

$$y = y_1 = sx,$$
$$z = z_1 = rx + tx^2, \qquad x \to 0,$$

wobei $r = r_1$ eine der n voneinander verschiedenen konjugierten Lösungen von $f(s, r) = 0$ ist.

Zunächst sieht man aus der Gestalt der Abbildungsgleichungen, daß alle Funktionen aus K auf $k = (s, r, t) = (\varkappa, t)$ abgebildet werden. Um zu beweisen, daß der Abbildungskörper kein echter Teilkörper von k ist, zeigen wir, daß es Funktionen aus K gibt, die auf s, r und t abgebildet werden.

Es wird

$$\frac{y}{x} \to s, \qquad \frac{z}{x} \to r\,.$$

Eine Funktion, die auf t abgebildet wird, finden wir folgendermaßen. Bedeuten $r = r_1, \ldots, r_n$ die n voneinander verschiedenen konjugierten Funktionen von r, so ist

$$\begin{aligned} f(s, r) &= a_0(s)\, r^n + \cdots + a_n(s) \\ &= a_0(s)\, (r - r_1) \cdots (r - r_n). \end{aligned}$$

Infolgedessen ist die Norm gebildet über die n in bezug auf s konjugierten Funktionen $z_i^{(1)} = xr_i$

$$\begin{aligned} h = a_0(s)\, N(z - z_i^{(1)}) &= a_0(s)\, (z - xr_1) \cdots (z - xr_n) \\ &= a_0(s)\, z^n + a_1(s)\, xz^{n-1} + \cdots + a_n x^n\,. \end{aligned}$$

Da $h(x, s, z)$ rational von s abhängt, erhalten wir, indem wir s durch $\frac{y}{x}$ ersetzen, eine rationale Funktion $h_1(x, y, z)$ von x, y, z mit folgender Eigenschaft. Es ist

$$\begin{aligned} h_1(x, y_1, z_1) &= a_0(s)\, (r_1 - r_2) \cdots (r_1 - r_n)\, x^{n+1} t + \cdots \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\, (s, r_1)\, x^{n+1} t + \cdots. \end{aligned}$$

Es ist $\frac{\partial f}{\partial r} = b(s, r)$ ein Polynom in s, r, das nicht identisch Null ist.

Da die Funktion $b\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = g(x, y, z)$ aus K für $y = y_1, z = z_1$ mit $b(s, r)$ beginnt,

$$g(x, y_1, z_1) = b(s, r) + \cdots,$$

so wird die Funktion

$$R(x, y, z) = \frac{h_1(x, y, z)}{x^{n+1}\, g(x, y, z)}$$

auf t abgebildet. Also kann K in der 3. Art auf jeden halbrationalen Körper abgebildet werden.

Ein Beispiel ist folgendes. Es sei $k = (\varkappa, t)$, wobei $\varkappa$ definiert sei durch

$$f(s, r) = r^2 + s^5 - 1 = 0\,.$$

Das Geschlecht von $\varkappa$ ist 2, so daß k kein rationaler Körper ist. Es ist

$$h_1 = z^2 + \left[\left(\frac{y}{x}\right)^5 - 1\right] x^2 = \frac{z^2 x^3 + y^5 - x^5}{x^3},$$

$$g = 2\,\frac{z}{x},$$

$$R = \frac{z^2 x^3 + y^5 - x^5}{2 z x^5}.$$

Bei der Abbildung

$$y = sx,$$
$$z = rx + tx^2, \qquad x \to 0$$

wird abgebildet

$$R_1 = \frac{y}{x} \to s,$$

$$R_2 = \frac{z}{x} \to r,$$

$$R_3 = R \to t.$$

Also wird $K = (x, y, z)$ auf $k = (\varkappa, t)$ abgebildet.

3. *Definition der Primteiler 3. Art.* Ein Primteiler 3. Art wird in der Weise, wie oben (I. Kap., § 2) definiert wurde, einer Abbildung 3. Art zugeordnet.

Wird bei der Abbildung x, y, z auf a, b, c abgebildet, so sagen wir, der Primteiler 3. Art gehört zu der Stelle $S = (a, b, c)$. Es seien u, v, w die Ortsfunktionen bei S, und die Abbildung sei in der Normalform gegeben durch

$$v_1 = b_1 u^{\frac{\beta_1}{\varepsilon}} + \cdots + s u^{\frac{\beta_\mu}{\varepsilon}}, \tag{38}$$
$$w_1 = c_1 u^{\frac{\gamma_1}{\varepsilon}} + \cdots + t u^{\frac{\gamma_\nu}{\varepsilon}},$$

wobei die β_i, γ_k und ε ganze Zahlen sind und ε so klein wie möglich gewählt ist.

Um zu sehen, auf welche Funktion aus A eine Funktion R aus K abgebildet wird, haben wir diese auf die Stelle S zu transformieren und (38) einzusetzen. Dabei wird

$$R = u^{\frac{\alpha}{\varepsilon}} E(u), \tag{39}$$

wobei α eine ganze Zahl oder 0 ist. R ist dann und nur dann durch den Primteiler teilbar, wenn $\alpha \neq 0$ ist. Die kleinste positive Zahl, die $\alpha \neq 0$ sein kann, ist die Zahl 1. Daher wird definiert:

Eine Funktion R ist genau durch die α-te Potenz des Primteilers 3. Art teilbar, wenn R beim Einsetzen von (38) die Gestalt (39) annimmt.

Es ist noch zu zeigen, daß es eine Funktion des Körpers gibt, die genau durch die erste Potenz des Primteilers 3. Art teilbar ist, daß also α tatsächlich 1 werden kann. Die beiden Gleichungen (38) definieren je einen algebraischen Körper der einen Veränderlichen u, der mit $k_1 = (u, v)$ und $k_2 = (u, w)$ bezeichnet sei, wenn wir s und t als Parameter auffassen. Der Körper $k = (u, v, w)$ der einen Veränderlichen u enthält k_1 und k_2 als Teilkörper. Da ε so klein wie möglich gewählt ist, hat die zu k gehörige Riemannsche Fläche über der u-Ebene bei $u = 0$ einen Verzweigungspunkt der Ordnung $\varepsilon - 1$. Zu jeder Stelle eines algebraischen Körpers einer Veränderlichen gibt es eine Funktion des Körpers, die dort von erster Ordnung Null wird. Infolgedessen gibt es eine rationale Funktion $r(u, v, w)$ von u, v, w, die noch von den Parametern s, t abhängt und für $u = 0$ Null wird, deren Entwicklung bei $u = 0$ mit einem Gliede $c(s, t) u^{\frac{1}{\varepsilon}}$ beginnt. Geben wir den Parametern s und t in $r(u, v, w)$ einen solchen Wert, daß c nicht Null wird, und beachten wir, daß $x = u + a$, $y = v + b$, $z = w + c$, so erhalten wir mit $r(u, v, w) = \bar{r}(x, y, z)$ eine Funktion aus $K = (x, y, z)$, die den durch (38) definierten Primteiler 3. Art genau in der ersten Potenz enthält.

§ 4. Die Zerlegung einer Funktion des Körpers K in Primteiler der Dimension 2.

1. *Die Zerlegung einer Funktion in Primteiler 1. Art.* Jede Funktion R aus K kann als Quotient zweier teilerfremder Polynome G, H dargestellt werden

$$R(x, y, z) = \frac{G(x, y, z)}{H(x, y, z)}.$$

Jedes Polynom läßt sich eindeutig in ein Produkt aus endlich vielen irreduziblen Polynomen zerlegen. Da jedem irreduziblen Polynom eindeutig ein Primteiler 1. Art entspricht und da außerdem R die Primteiler $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ nur in endlicher Potenz enthalten kann, läßt sich jede Funktion R eindeutig in ein Produkt aus endlich vielen Primteilern 1. Art zerlegen.

Ein Produkt von Primteilern 1. Art, jeder in einer ganzzahligen Potenz genommen, wird ein Divisor genannt.

2. *Die Teilbarkeit eines Primteilers 1. Art durch einen Primteiler 2. Art.* Ein Primteiler 2. Art $\mathfrak{a}$ sei gegeben durch

$$w = w_0(u) + a_1(u)\,(v - v_0)^{\alpha_1} + \cdots + t(v - v_0)^{\alpha_\nu}.$$

Es sei dies die Entwicklung für die Umgebung der Stelle $S = (a, b, c)$, durch die die Raumkurve geht, zu der $\mathfrak{a}$ gehört.

Für die Umgebung dieser Stelle hat R die Darstellung

$$R = \frac{G(u, v, w)}{H(u, v, w)},$$

wobei G, H Polynome in u, v, w sind. Ein irreduzibler Faktor $A_i(u, v, w)$ des Zählers oder Nenners von R kann den Primteiler $\mathfrak{a}$ nur dann in einer von Null verschiedenen Potenz enthalten, wenn $A_i(0, 0, 0) = 0$ ist. Dann ist $A_i(u, v, w)$ zugeordnete Funktion des Primteilers 1. Art $\mathfrak{A}_i$ für die Stelle S. Daß die zugeordnete Funktion A_i von $\mathfrak{A}_i$ nur bis auf eine Einheit für S als Faktor bestimmt ist, hat auf die Teilbarkeit von A_i durch $\mathfrak{a}$ keinen Einfluß, da bei S jede Einheit $\mathfrak{a}$ in der nullten Potenz enthält. Das können wir auch so aussprechen: Um die Potenz zu bestimmen, in der R durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, können wir R durch den Quotienten der für die Stelle S zugeordneten Funktionen A_i der in R enthaltenen Primteiler 1. Art $\mathfrak{A}_i$ ersetzen, wobei jedes A_i in der Potenz genommen wird, in der $\mathfrak{A}_i$ in R enthalten ist. Enthält dann A_i den Primteiler $\mathfrak{a}$ in der Potenz β_i und enthält R den Primteiler 1. Art $\mathfrak{A}_i$ in der Potenz α_i, so ist R durch die Potenz $\Sigma\,\alpha_i\beta_i$ des Primteilers $\mathfrak{a}$ teilbar, wobei die Summe über alle in R enthaltenen Primteiler 1. Art zu erstrecken ist. Das führt zu folgender Definition:

Ein Primteiler 1. Art $\mathfrak{A}$ enthält den Primteiler $\mathfrak{a}$ 2. Art in der Potenz β, wenn die zugeordnete Funktion A von $\mathfrak{A}$ den Primteiler $\mathfrak{a}$ in der Potenz β enthält.

3. *Die Teilbarkeit eines Primteilers 1. Art durch einen Primteiler 3. Art.* Eine Funktion $R(x, y, z)$ sei teilbar durch die Primteiler 1. Art $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$. Ein Primteiler 3. Art $\mathfrak{a}^*$ gehöre zur Stelle $S = (a, b, c)$ und sei definiert durch

$$v = b_1 u^{\beta_1} + \cdots + s u^{\beta_\mu},$$
$$w = c_1 u^{\gamma_1} + \cdots + t u^{\gamma_\nu}.$$

Für die Umgebung der Stelle S hat R die Darstellung

$$R(u, v, w) = \frac{G(u, v, w)}{H(u, v, w)}.$$

Ein irreduzibler Faktor A_i von G oder H kann $\mathfrak{a}^*$ nur dann in einer von Null verschiedenen Potenz enthalten, wenn $A_i(0, 0, 0) = 0$ ist. Umgekehrt ist jeder Faktor, der sich von A_i nur um eine Einheit für S unterscheidet, durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{a}^*$ teilbar wie A_i. Daher können wir uns bei der Bestimmung der Potenz, in der R durch $\mathfrak{a}^*$ teilbar ist, auf den Quotienten der zu $\mathfrak{A}_i$ bei der Stelle S zugeordneten Funktionen A_i beschränken, wobei wieder jedes A_i in der Potenz zu nehmen ist, in der $\mathfrak{A}_i$ in R_i enthalten ist. Ist dann $\mathfrak{a}^*$ in A_i in der Potenz γ_i und $\mathfrak{A}_i$ in R in der Potenz α_i enthalten, so ist R genau durch die Potenz $\Sigma\,\alpha_i\gamma_i$ von $\mathfrak{a}^*$ teilbar, wobei über alle in R enthaltenen Primteiler 1. Art zu summieren ist. Daher definieren wir:

Ein Primteiler 1. Art $\mathfrak{A}$ enthält den Primteiler 3. Art $\mathfrak{a}^*$ in der Potenz γ, wenn die $\mathfrak{A}$ zugeordnete Funktion A den Primteiler $\mathfrak{a}^*$ in der Potenz γ enthält.

Die Teilbarkeit eines Primteilers 1. Art durch einen Primteiler 2. oder 3. Art ist genau von der oben definierten Teilbarkeit einer Funktion durch einen Primteiler 2. oder 3. Art zu unterscheiden. Wenn wir sagen, $\mathfrak{A}$ ist durch $\mathfrak{a}^\beta$ teilbar, so heißt das nicht: Ist R durch $\mathfrak{A}^\alpha$ teilbar, so ist R genau durch $\mathfrak{a}^{\alpha\beta}$ teilbar. Der Sinn dieser letzten beiden Definitionen ist vielmehr folgender: Jede Funktion aus K kann eindeutig in ein Produkt endlich vieler Primteiler 1. Art zerlegt werden. Eine eindeutige Zerlegung einer Funktion in Primteiler 2. und 3. Art ist unmöglich, da jede Funktion R eine unendlich große Anzahl Primteiler 2. und 3. Art enthalten kann. Ist aber ein bestimmter Primteiler 2. oder 3. Art gegeben, so brauchen wir bei der Zerlegung einer Funktion R in Primteiler der Dimension 2 die Teilbarkeit durch diesen Primteiler 2. oder 3. Art nicht besonders anzugeben, wenn wir für alle in R enthaltenen Primteiler 1. Art nach den letzten beiden Teilbarkeitsdefinitionen bestimmt haben, in welcher Potenz sie diesen Primteiler 2. oder 3. Art enthalten. Ist dann

$$R = \mathfrak{A}_1^{\alpha_1}\mathfrak{A}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{A}_n^{\alpha_n}$$

und ist $\mathfrak{a}$ in der Potenz β_i und $\mathfrak{a}^*$ in der Potenz γ_i in $\mathfrak{A}_i$ enthalten, so ist R genau teilbar durch

$$\mathfrak{a}^{\Sigma\alpha_i\beta_i} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}^{*\Sigma\alpha_i\gamma_i},$$

wobei die Summen von 1 bis n zu erstrecken sind.

Eingegangen 23. Februar 1938.

Die elliptische Normalkurve sechster Ordnung als Tripelreihe.

Von *E. A. Weiss* in Bonn.

Über die elliptische Normalkurve $\mathfrak{C}^6$ des $\mathfrak{R}_5$ liegen neben Untersuchungen von F. Klein und C. Segre über elliptische Kurven schlechthin zwei Arbeiten von C. Rosati [1]) und E. Veneroni [2]) vor. Das Hauptergebnis von Rosati lautet: Durch die $\mathfrak{C}^6$ laufen vier Veronesesche Flächen. Ihre Sehnenmannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_4^3$ gehören einem Büschel an. Das Doppelverhältnis dieser $\mathfrak{M}_4^3$ ist das charakteristische Doppelverhältnis der Kurve. Veneroni setzt die Untersuchungen von Rosati fort, indem er die allgemeine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4^3$ des Büschels, ihre Erzeugung und Beziehung zur $\mathfrak{C}^6$ behandelt.

Ausführlicher ist über die elliptische Raumkurve 6. Ordnung gearbeitet worden. Neben E. Weyr hat sich hauptsächlich F. London [3]) mit dieser Kurve beschäftigt. Er gewinnt sie als Erzeugnis von drei Ebenenbüscheln, die durch zwei trilineare Verwandtschaften aufeinander bezogen sind. Seine Untersuchungen fußen daher auf seiner früheren Arbeit [4]) über diese Verwandtschaften. In dieser behandelt er u. a. das *Tripelfeld*, nämlich die Figur aller Tripel ξ, η, ζ, die einer trilinearen Verwandtschaft $(\alpha\xi)\,(\beta\eta)\,(\gamma\zeta) = 0$ angehören, und seine Abbildung auf die Ebene, sowie eindimensionale Mannigfaltigkeiten von Tripeln, die er *unikursale* und *bikursale Tripelreihen* nennt.

Die Invariantentheorie einer trilinearen Verwandtschaft hat nun durch eine Arbeit von E. Schwartz [5]) einen gewissen Abschluß erhalten. In dieser Arbeit wird auf Grund eines vollständigen Invariantensystems der Form eine Klassifikation der trilinearen Formen gegeben. Die Formen werden ferner auf die Punkte eines $\mathfrak{R}_7$ abgebildet, und es werden die Bildmannigfaltigkeiten der einzelnen Formentypen bestimmt. Die vorliegende Arbeit kann als Fortsetzung der Arbeit von E. Schwartz in dem Sinne aufgefaßt werden, als sie die Abbildung eines Büschels trilinearer Formen untersucht.

Zunächst zeigt sich, daß bei der Abbildung der trilinearen Formen auf den $\mathfrak{R}_7$ einem Tripelfeld eine Fläche $\mathfrak{M}_2^6$ von Del Pezzo [6]) entspricht und daß die von F. London untersuchte Abbildung des Tripelfeldes auf die Ebene bereits von Del Pezzo als Abbildung der $\mathfrak{M}_2^6$ auf die Ebene angegeben worden war. Die *unikursalen* und *bikursalen Tripelreihen*

[1]) C. Rosati, Sulle curve ellittiche del sest' ordine, R. Ist. Lombardo Rendiconti (2) **35** (1902), S. 406—411.

[2]) E. Veneroni, Intorno ad un fascio di varietà cubiche dello spazio a cinque dimensioni, R. Ist. Lombardo Rendiconti (2) **38** (1905), S. 523—537.

[3]) F. London, Die Raumkurve sechster Ordnung vom Geschlechte 1 als Erzeugnis trilinearer Grundgebilde, Math. Ann. **45** (1894), S. 545—597.

[4]) F. London, Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaften dreier einstufiger Grundgebilde, Math. Ann. **44** (1894), S. 375—412.

[5]) E. Schwartz, Über binäre trilineare Formen, Math. Zeitschrift **12** (1922), S. 18—35.

[6]) P. Del Pezzo, Sulle superficie dell'n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni, Rendiconti Circolo Mat. di Palermo **1** (1887), S. 241—271.

werden durch die Abbildung zu rationalen Raumkurven 3. Ordnung und elliptischen Normalkurven 6. Ordnung des $\mathfrak{R}_5$.

So ergibt sich ein neuer Weg zur elliptischen Normalkurve 6. Ordnung. Im folgenden wird auf diesem Wege gezeigt, daß die Kurve als Schnitt von ∞^1 Del Pezzo-Flächen $\mathfrak{M}_2^6$ gewonnen werden kann, die von einem Büschel von $\mathfrak{R}_6$ aus einer Segreschen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_3^6$ des $\mathfrak{R}_7$ ausgeschnitten werden. Vier von diesen Flächen haben Doppelpunkte. Ihre Projektionen von den Doppelpunkten aus in den $\mathfrak{R}_5$ der Kurve geben die vier Veroneseschen Flächen der $\mathfrak{C}^6$. Die Sehnenmannigfaltigkeiten der Del Pezzo-Flächen schneiden aus dem $\mathfrak{R}_5$ der Kurve das durch sie bestimmte Büschel von $\mathfrak{M}_4^3$ aus. Neben diesen geometrischen Folgerungen ergibt sich eine invariante Darstellung der Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_4^3$ und ein einfacher Beweis für den Satz, nach dem das Doppelverhältnis der vier zu den Veroneseschen Flächen der Kurve gehörigen Sehnenmannigfaltigkeiten das charakteristische Doppelverhältnis der Kurve ist.

1. Der für uns wesentliche Inhalt der Arbeit von E. Schwartz besteht in folgendem: Bildet man die trilinearen Formen

$$(1) \qquad \mathfrak{F} \equiv (\alpha\xi)\,(\beta\eta)\,(\gamma\zeta) = a_{111}\xi_2\eta_2\zeta_2 + - \cdots - a_{222}\xi_1\eta_1\zeta_1$$

dadurch auf die Punkte des $\mathfrak{R}_7$ ab, daß man ihre Koeffizienten a_{ikl} als homogene Punktkoordinaten deutet, so werden die höchstsingulären Formen $(\alpha\xi)\cdot(\beta\eta)\cdot(\gamma\zeta)$ auf die Punkte einer Segreschen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_3^6$ abgebildet, die den vollständigen Schnitt von drei Segreschen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_4^4$ ausmacht. Jede von diesen ist die Bildmannigfaltigkeit einer Familie halbzerfallener Trilinearformen vom Typus $(\alpha\xi)\cdot(\beta\eta)\,(\gamma\zeta)$, $(\beta\eta)\cdot(\alpha\xi)\,(\gamma\zeta)$ oder $(\gamma\zeta)\cdot(\alpha\xi)\,(\beta\eta)$.

Eine allgemeine Trilinearform läßt sich eindeutig als lineare Kombination von zwei höchstsingulären schreiben. Deren Nullstellen heißen *Kernparameter* der Form. Dementsprechend läuft durch einen Punkt $\mathfrak{F}$ allgemeiner Lage des $\mathfrak{R}_7$ eine Bisekante von $\mathfrak{M}_3^6$. Die Bisekante wird zur Tangente, die „doppelkernige" zur „einkernigen" Form, wenn die Diskriminante

$$(2) \qquad \mathfrak{D} = \tfrac{1}{8}\,(\alpha\alpha'')\,(\alpha'\alpha''')\,(\beta\beta')\,(\gamma\gamma')\,(\beta''\beta''')\,(\gamma''\gamma''')$$

der Form verschwindet. Die Gleichung $\mathfrak{D} = 0$ stellt im $\mathfrak{R}_7$ eine $\mathfrak{M}_6^4$ dar.

Das durch die Bisekante dargestellte *syzygetische Büschel* läßt sich in der Gestalt $\lambda_1\mathfrak{F} + \lambda_2\mathfrak{Q}$ darstellen, wo $\mathfrak{Q}$ die mit $\mathfrak{F}$ invariant verbundene Trilinearform

$$(3) \qquad \mathfrak{Q} = \tfrac{1}{2}\,(\beta\beta')\,(\gamma\gamma')\,(\alpha\alpha'')\,(\alpha'\xi)\,(\beta''\eta)\,(\gamma''\zeta)$$

bezeichnet. Der Punkt $\mathfrak{Q}$ liegt harmonisch zum Punkte $\mathfrak{F}$ bezüglich der beiden Punkte, die von der durch $\mathfrak{F}$ laufenden Bisekante aus $\mathfrak{M}_3^6$ ausgeschnitten werden.

2. *Die Del Pezzo-Fläche* $\mathfrak{M}_2^6$. Im $\mathfrak{R}_7$ wird durch die besprochene Abbildung ein Nullsystem erklärt. Zwei Punkte $\mathfrak{F}^*$ und $\mathfrak{F}$ sind bezüglich dieses Nullsystems konjugiert, wenn ihre Invariante

$$(4) \qquad (\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}) = (\alpha^*\alpha)\,(\beta^*\beta)\,(\gamma^*\gamma)$$

verschwindet. Der Ort aller Punkte $\mathfrak{F}$, die zu einem Punkte $\mathfrak{F}^*$ konjugiert sind, ist ein $\mathfrak{R}_6$

$$(5) \qquad (\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}) = 0.$$

Er schneidet $\mathfrak{M}_3^6$ in einer $\mathfrak{M}_2^6$, also in einer Fläche von Del Pezzo. Im Falle, daß der Punkt $\mathfrak{F}^*$ allgemeine Lage hat, die Form $\mathfrak{F}^*$ also doppelkernig ist, läßt sich $\mathfrak{F}^*$ in der Gestalt

$$(6) \qquad \mathfrak{F}^* = \lambda_1(\alpha^1\xi)\cdot(\beta^1\eta)\cdot(\gamma^1\zeta) + \lambda_2(\alpha^2\xi)\cdot(\beta^2\eta)\cdot(\gamma^2\zeta)$$

schreiben, wo $\alpha^1, \ldots, \gamma^2$ die Kernparameter der Form bezeichnen. In diesem Falle sind z. B. sämtliche Tripel α^1, β^2, ζ (wo ζ ein beliebiger Parameter ist) zu $\mathfrak{F}^*$ konjugiert. Das Bild des Tripelfeldes $\mathfrak{F}^* = 0$, die reguläre Del Pezzo-Fläche $\mathfrak{M}_2^6$, enthält daher sechs Geraden, die ein Sechsseit bilden.

Nimmt man nun in der Bildebene ein Dreieck an (*Grunddreieck*), dessen Eckpunkte nicht auf einer Geraden liegen, so werden die Geradenbüschel mit diesen Eckpunkten als Scheiteln bekanntlich durch die Punkte der Ebene vermöge einer doppelkernigen trilinearen Verwandtschaft aufeinander bezogen: Drei Strahlen bilden ein Tripel, wenn sie durch einen Punkt der Ebene laufen. Hierauf gründet sich eine Abbildung der $\mathfrak{M}_2^6$ auf die Ebene. Es entspricht im allgemeinen eindeutig einem Punkte der Ebene ein Tripel der trilinearen Verwandtschaft und daher ein bestimmter Punkt der $\mathfrak{M}_2^6$. Ausnahmepunkte bilden nur die Scheitel der drei Büschel. Sie werden auf drei, nicht aneinander stoßende Seiten des Sechsseits abgebildet. Die drei fehlenden Seiten des Sechsseits entsprechen den Seiten des Grunddreiecks.

Bei der Abbildung werden kubische Raumkurven der $\mathfrak{M}_2^6$ auf Geraden der Ebene oder Kegelschnitte abgebildet, die durch die Ecken des Grunddreiecks laufen. So folgt

Satz 1. *Die reguläre Del Pezzo-Fläche $\mathfrak{M}_2^6$ enthält sechs Geraden, die ein Sechsseit bilden. Auf dieser Fläche liegen zwei Familien von je ∞^2 kubischen Raumkurven. Die Kurven der einen Familie schneiden ein Tripel nicht zusammenstoßender Seiten des Sechsseits, die Kurven der zweiten Familie die Seiten des zweiten Tripels. Zwei Kurven derselben Familie schneiden sich in einem Punkte, zwei Kurven aus verschiedenen Familien in zwei Punkten. Zwei Punkte der Fläche bestimmen je eine Kurve jeder Familie.*

Wählt man die drei Punkte des Grunddreiecks auf einer Geraden, so werden die drei Geradenbüschel von den Punkten der Ebene durch eine einkernige trilineare Verwandtschaft aufeinander bezogen. Das Tripelfeld wird auf eine $\mathfrak{M}_2^6$ mit einem Doppelpunkt abgebildet, der der ausgezeichneten Geraden entspricht. Die Scheitel der drei Geradenbüschel geben drei durch den Doppelpunkt laufende Geraden von $\mathfrak{M}_2^6$, und die Fläche enthält, den Geraden der Ebene entsprechend, nur noch eine Familie kubischer Raumkurven.

Satz 2. *Eine Del Pezzo-Fläche $\mathfrak{M}_2^6$ mit Doppelpunkt enthält drei Geraden, die durch den Doppelpunkt laufen. Auf der Fläche liegt nur eine Familie von ∞^2 rationalen Raumkurven 3. Ordnung. Diese laufen alle durch den Doppelpunkt. Zwei Kurven der Familie schneiden sich außerdem in einem Punkte. Zwei vom Doppelpunkt verschiedene Punkte der Fläche bestimmen eindeutig eine Kurve der Familie.*

3. *Die Sehnenmannigfaltigkeit der Del Pezzo-Fläche $\mathfrak{M}_2^6$.* Wir betrachten den durch $(\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}) = 0$ dargestellten $\mathfrak{R}_6$ und die Del Pezzo-Fläche, die er aus $\mathfrak{M}_3^6$ ausschneidet. Die Sehnenmannigfaltigkeit der Fläche ist der Ort aller Punkte $\mathfrak{F}$ des $\mathfrak{R}_6$, deren kovarianter Punkt $\mathfrak{Q}$ demselben $\mathfrak{R}_6$ angehört; denn durch $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{Q}$ wird ja die, im allgemeinen einzige, durch $\mathfrak{F}$ laufende Bisekante von $\mathfrak{M}_3^6$ aufgespannt. Die Sehnenmannigfaltigkeit der $\mathfrak{M}_2^6$ des Raumes $(\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}) = 0$ hat daher die Gleichungen

$$(7) \qquad (\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}) = 0, \quad (\mathfrak{F}^*\mathfrak{Q}) = 0.$$

Sie ist von 3. Ordnung, weil $\mathfrak{Q}$ in den Koeffizienten a_{ikl} vom 3. Grade ist.

Über die Gestalt der Sehnenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_5^3$ können wir folgendes sagen: Im Falle einer regulären $\mathfrak{M}_2^6$ haben wir auf der Fläche zwei Familien von je ∞^2 Raumkurven 3. Ordnung. Jede von ihnen spannt einen $\mathfrak{R}_3$ auf, und jeder so erklärte $\mathfrak{R}_3$ gehört der Sehnenmannigfaltigkeit ganz an, weil durch jeden Punkt eines solchen $\mathfrak{R}_3$ eine Sehne der betreffenden kubischen Raumkurve läuft. So entstehen zwei Familien von je ∞^2 Räumen $\mathfrak{R}_3$ der $\mathfrak{M}_5^3$.

Nun schneiden sich zwei kubische Raumkurven aus verschiedenen Familien in zwei Punkten, haben also eine Sehne gemeinsam. Dementsprechend schneiden sich zwei Räume verschiedener Art in einer Geraden. Andererseits haben zwei Raumkurven 3. Ordnung derselben Art nur einen Schnittpunkt gemeinsam. Also schneiden sich zwei Räume derselben Art nur in einem Punkte. Ein zweiter gemeinsamer Punkt der beiden

Räume würde zu zwei durch diesen Punkt laufenden Sehnen der zugehörigen kubischen Raumkurven führen, und diese müßten zusammenfallen, weil es durch einen Punkt allgemeiner Lage des $\mathfrak{R}_7$ — um einen solchen müßte es sich handeln — nur eine Sehne der $\mathfrak{M}_3^6$ gibt. Also folgt

Satz 3. *Die Sehnenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_5^3$ einer regulären Del Pezzo-Fläche $\mathfrak{M}_2^6$ enthält zwei Familien von je ∞^2 Räumen $\mathfrak{R}_3$. Zwei Räume verschiedener Art schneiden sich in einer Geraden, zwei Räume derselben Art in einem Punkt.*

Wir wollen die Gleichung der Sehnenmannigfaltigkeit in dem speziellen Falle ableiten, in dem die Form $\mathfrak{F}^*$ die kanonische Gestalt

$$\mathfrak{F}^* = \xi_1\eta_1\zeta_1 - \xi_2\eta_2\zeta_2 \tag{8}$$

besitzt. Dann wird

$$(\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}) = a_{111} - a_{222}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{F}^*\mathfrak{Q}) = &- 2a_{112}a_{121}a_{211} + a_{111}(a_{122}a_{211} + a_{112}a_{221} + a_{121}a_{212} - a_{111}a_{222})\\ &- 2a_{221}a_{212}a_{122} + a_{222}(a_{211}a_{122} + a_{221}a_{112} + a_{212}a_{121} - a_{222}a_{111}).\end{aligned} \tag{10}$$

Setzt man hier wegen (9) $a_{222} = a_{111}$, so gewinnt man die Gleichung der Sehnenmannigfaltigkeit in der Gestalt:

$$\begin{vmatrix} a_{111} & a_{221} & a_{121} \\ a_{112} & a_{111} & a_{122} \\ a_{212} & a_{211} & a_{111} \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Die Gleichung zeigt:

Satz 4. *Die Sehnenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_5^3$ entsteht als Erzeugnis von drei projektiven $\mathfrak{R}_5$-Bündeln, deren Träger drei Räume $\mathfrak{R}_3$ der ersten oder drei Räume der zweiten Familie sind.*

In genau der gleichen Weise folgt für die $\mathfrak{M}_2^6$ mit Doppelpunkt, die ja nur eine Familie rationaler kubischer Raumkurven trägt, daß ihre Sehnenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_5^3$ nur eine Schar von Räumen $\mathfrak{R}_3$ enthält, die sämtlich durch den Doppelpunkt der Fläche laufen. Es handelt sich also um einen Kegel $\mathfrak{M}_5^3$. Eine Vorstellung von der Gestalt dieses Kegels erhalten wir, wenn wir ihn mit einem $\mathfrak{R}_5$ zum Schnitt bringen.

Projiziert man $\mathfrak{M}_2^6$ von ihrem Doppelpunkt aus in einen $\mathfrak{R}_5$, so erhält man eine Fläche $\mathfrak{M}_2^4$, die, den ∞^2 kubischen Raumkurven der $\mathfrak{M}_2^6$ entsprechend, ∞^2 Kegelschnitte trägt, eine Veronesesche Fläche. Die Räume $\mathfrak{R}_3$ des Kegels $\mathfrak{M}_5^3$ schneiden die Ebenen dieser Kegelschnitte aus dem $\mathfrak{R}_5$ aus. Diese erfüllen aber die Sehnenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4^3$ der Veroneseschen Fläche. Also gilt

Satz 5. *Die Sehnenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_5^3$ der Del Pezzo-Fläche $\mathfrak{M}_2^6$ mit Doppelpunkt ist ein Kegel, der von dem Doppelpunkte der Fläche aus die Sehnenmannigfaltigkeit einer Veroneseschen Fläche projiziert.*

4. *Die elliptische Normalkurve $\mathfrak{C}^6$ des $\mathfrak{R}_5$.* Wir betrachten den Schnitt der Segreschen $\mathfrak{M}_3^6$ mit einem $\mathfrak{R}_5$: $(\mathfrak{F}^{(1)}\mathfrak{F}) = 0$, $(\mathfrak{F}^{(2)}\mathfrak{F}) = 0$. Die Schnittkurve $\mathfrak{C}^6$ ist elliptisch. Denkt man sich nämlich die $\mathfrak{M}_2^6$, die $(\mathfrak{F}^{(1)}\mathfrak{F}) = 0$ aus $\mathfrak{M}_3^6$ ausschneidet, nach dem Verfahren der Nr. 2 auf die Ebene abgebildet, die zweite $\mathfrak{M}_2^6$ auf das Tripelfeld einer zweiten trilinearen Verwandtschaft zwischen den Geradenbüscheln der drei Grundpunkte, so entsteht als Bild der $\mathfrak{C}^6$ das „Erzeugnis" dieser trilinearen Verwandtschaft, eine durch die drei Grundpunkte laufende ebene elliptische Kurve 3. Ordnung c^3. Wie diese Kurve als Erzeugnis von ∞^1 trilinearen Verwandtschaften (zwischen denselben Geradenbüscheln) erhalten werden kann, die ein Büschel bilden, so laufen durch die $\mathfrak{C}^6$ jetzt ∞^1 Del Pezzo-Flächen $\mathfrak{M}_2^6$ der $\mathfrak{M}_3^6$, die von dem $\mathfrak{R}_6$-Büschel

$$\lambda_1(\mathfrak{F}^{(1)}\mathfrak{F}) + \lambda_2(\mathfrak{F}^{(2)}\mathfrak{F}) = 0 \tag{12}$$

ausgeschnitten werden. Zu jeder $\mathfrak{M}_2^6$ gehört eine Sehnenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_5^3$, mit den Gleichungen (12) und

$$\lambda_1(\mathfrak{F}^{(1)}\mathfrak{Q}) + \lambda_2(\mathfrak{F}^{(2)}\mathfrak{Q}) = 0, \tag{13}$$

und diese schneidet den $\mathfrak{R}_5$ der Kurve in einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4^3$.

Unter Berücksichtigung der Sätze 3 und 4 folgt daher

Satz 6. *Die Sehnenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_3^9$ der $\mathfrak{C}^6$ ist die Basismannigfaltigkeit eines Büschels von Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_4^3$.*

Die allgemeine $\mathfrak{M}_4^3$ des Büschels enthält zwei Familien von je ∞^2 Ebenen. Zwei Ebenen der gleichen Art schneiden sich im allgemeinen nicht. Zwei Ebenen verschiedener Art schneiden sich im allgemeinen in einem Punkte. Die Mannigfaltigkeit entsteht als Erzeugnis von drei projektiven $\mathfrak{R}_4$-Bündeln, deren Träger drei Ebenen der ersten oder drei Ebenen der zweiten Art sein können.

Im Nullsystem des $\mathfrak{R}_7$ ist dem $\mathfrak{R}_6$-Büschel eine Gerade zugeordnet. Sie schneidet die $\mathfrak{M}_6^4$ mit der Gleichung $\mathfrak{D} = 0$ in vier Punkten. Daher werden von vier $\mathfrak{R}_6$ des Büschels aus $\mathfrak{M}_3^6$ Del Pezzo-Flächen mit Doppelpunkt ausgeschnitten. Also folgt unter Berücksichtigung von Satz 5

Satz 7. *In dem Büschel der durch $\mathfrak{C}^6$ bestimmten Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_4^3$ befinden sich vier Sehnenmannigfaltigkeiten Veronesescher Flächen.*

Im Satze 6 ist noch die Einschränkung „im allgemeinen" zu erklären. Zwei Räume $\mathfrak{R}_3$ verschiedener Art der $\mathfrak{M}_5^3$ schneiden sich in einer Geraden. Die Ebenen, die sie aus $\mathfrak{R}_5$ ausschneiden, haben einen Punkt oder eine Gerade gemeinsam, je nachdem die Schnittgerade der beiden Räume nicht im $\mathfrak{R}_5$ oder im $\mathfrak{R}_5$ gelegen ist. Da die Schnittgerade eine gemeinsame Sehne der zu den beiden $\mathfrak{R}_3$ gehörigen kubischen Raumkurven ist, handelt es sich im letzten Falle um eine Sehne von $\mathfrak{C}^6$. Durch eine solche Sehne läuft umgekehrt von jeder Familie eine Ebene, da man nach Satz 1 durch zwei Punkte von $\mathfrak{M}_2^6$ je eine kubische Raumkurve der beiden Familien, also auch je einen $\mathfrak{R}_3$ der beiden $\mathfrak{R}_3$-Familien von $\mathfrak{M}_5^3$ legen kann. Diese beiden $\mathfrak{R}_3$ schneiden dann die gesuchten Ebenen aus $\mathfrak{R}_5$ aus.

Nun schneidet jede Ebene von $\mathfrak{M}_4^3$ die $\mathfrak{C}^6$ in drei Punkten, nämlich in den Punkten, in denen die in ihrem $\mathfrak{R}_3$ gelegene kubische Raumkurve 3. Ordnung den $\mathfrak{R}_5$ der Kurve trifft. Daher gilt

Satz 8. *Die Ebenen einer regulären $\mathfrak{M}_4^3$ des Büschels sind Trisekantenebenen von $\mathfrak{C}^6$. Auf einer solchen $\mathfrak{M}_4^3$ schneidet jede Ebene der einen Art drei Ebenen der anderen Art in Geraden, nämlich Sehnen der $\mathfrak{C}^6$.*

Ebenso findet man, daß sich zwei Ebenen derselben Familie nur dann schneiden, wenn sie sich auf der $\mathfrak{C}^6$ treffen.

5. *Zusammenhang zwischen den ebenen Abbildungen der Veroneseschen Fläche und der Del Pezzo-Fläche mit Doppelpunkt.* Ein $\mathfrak{R}_6$ mit der Gleichung $(\mathfrak{F}^{(3)}\mathfrak{F}) = 0$ schneidet den $\mathfrak{R}_5$ der $\mathfrak{C}^6$ in einem $\mathfrak{R}_4$ und die $\mathfrak{C}^6$ selbst in sechs Punkten. Da der $\mathfrak{R}_4$ schon von fünf Punkten aufgespannt wird, handelt es sich um *sechs assoziierte* Punkte der $\mathfrak{C}^6$, die Bildpunkte von sechs assoziierten Tripeln, die drei trilinearen Verwandtschaften gemeinsam sind. Je fünf von ihnen bestimmen den sechsten linear.

Die trilineare Verwandtschaft $\mathfrak{F}^{(3)}$ erzeugt in der Bildebene des Tripelfeldes der Verwandtschaft $\mathfrak{F}^{(1)}$ eine zweite, durch die Eckpunkte des Grunddreiecks laufende Kurve 3. Ordnung, welche die erste in neun (assoziierten) Punkten schneidet. Von diesen fallen drei in die Eckpunkte des Grunddreiecks.

Die Abbildung wird besonders einfach, wenn man für $\mathfrak{F}^{(1)}$ eine einkernige Verwandtschaft des Büschels wählt. Da die Grundpunkte dann auf einer Geraden liegen,

müssen die übrigen sechs der neun assoziierten Punkte einem Kegelschnitt angehören. Sechs assoziierte Punkte der $\mathfrak{C}^6$ werden dann auf ein konisches Punktsechstupel der Bildkurve c^3 von $\mathfrak{C}^6$ abgebildet. So entsteht eine Abbildung der $\mathfrak{R}_4$ im Raume $\mathfrak{R}_5$ der $\mathfrak{C}^6$ auf die Kurven 2. Ordnung der Ebene, und die Übertragung bekannter Sätze über konische Sechstupel der c^3 liefert Sätze über Räume $\mathfrak{R}_4$, die in besonderer Beziehung zur $\mathfrak{C}^6$ stehen. Wir erwähnen nur einen. Aus der Tatsache, daß es — den halben Perioden entsprechend — vier Familien von je ∞^2 Kurven 2. Ordnung gibt, welche c^3 in drei Punkten berühren (darunter die doppelt-gezählten Geraden), folgt

Satz 9. *Es gibt vier Familien von je ∞^2 $\mathfrak{R}_4$, welche die $\mathfrak{C}^6$ in drei Punkten berühren. Jede Familie gehört zu einer Veroneseschen Fläche in der Weise, daß jeder $\mathfrak{R}_4$ der Familie durch eine Kegelschnittebene der betreffenden Veroneseschen Fläche läuft und die $\mathfrak{C}^6$ in den drei Punkten berührt, in denen die Ebene die $\mathfrak{C}^6$ schneidet.*

Wie hängt nun die eben besprochene Abbildung der Kegelschnitte der Ebene auf die $\mathfrak{R}_4$ des $\mathfrak{R}_5$ mit unserer Abbildung der Ebene auf die $\mathfrak{M}_2^6$ mit Doppelpunkt zusammen?

Eine Kurve 2. Ordnung allgemeiner Lage der Bildebene wird auf eine rationale Raumkurve 6. Ordnung der $\mathfrak{M}_2^6$ abgebildet, die zweimal durch den Doppelpunkt läuft. Bei der Projektion der $\mathfrak{M}_2^6$ vom Doppelpunkt aus wird aus ihr eine rationale Raumkurve 4. Ordnung der Veroneseschen Fläche. Die Kurve spannt einen $\mathfrak{R}_4$ auf, und dieser schneidet $\mathfrak{C}^6$ in den Bildpunkten der sechs Punkte, in denen der Ausgangskegelschnitt die Kurve c^3 trifft. Der von diesen sechs Punkten der $\mathfrak{C}^6$ aufgespannte $\mathfrak{R}_4$ ist also der Bild-$\mathfrak{R}_4$ des Ausgangskegelschnitts. Bei diesem Abbildungsverfahren gehen, wie wir bereits wissen, die Punkte der Ebene über die Punkte von $\mathfrak{M}_2^6$ in die Punkte einer Veroneseschen Fläche über. Wir können daher sagen:

Satz 10. *Die bekannte Abbildung der Ebene als Ort von Kurven 2. Klasse und Kurven 2. Ordnung auf die Punkte und $\mathfrak{R}_4$ eines $\mathfrak{R}_5$ entsteht durch Zusammensetzung der Abbildung dieser als Tripelfeld einer einkernigen trilinearen Verwandtschaft aufgefaßten Ebene auf die Del Pezzo-Fläche $\mathfrak{M}_2^6$ mit Doppelpunkt und der Projektion dieser Fläche von ihrem Doppelpunkt aus in den $\mathfrak{R}_5$.*

6. *Zusammenhang zwischen den Sechstupeln assoziierter Tripel und den Sechstupeln linear abhängiger Punktepaare.* Das Bild der Punktepaare x, x' zweier Ebenen e, e' ist eine Segresche Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4^6$. Der Schnitt dieser Mannigfaltigkeit mit einem $\mathfrak{R}_6$ ist eine Del Pezzo-Fläche $\mathfrak{M}_2^6$. Sie ist das Bild der Mannigfaltigkeit aller Punktepaare x, x' einer zwischen den Ebenen e, e' erklärten quadratischen Verwandtschaft, die durch Schnitt zweier Korrelationen entsteht.

Die Möglichkeit einer Abbildung des Tripelfeldes auf die Mannigfaltigkeit der Punktepaare einer quadratischen Verwandtschaft können wir auch so einsehen: Im allgemeinen Falle sind in einem Büschel von Korrelationen drei Korrelationen vom Range 2 enthalten. Eine Korrelation vom Range 2 bestimmt in jeder Ebene ein Strahlenbüschel und dazu eine Projektivität zwischen diesen Strahlenbüscheln. Die Scheitel der beiden Geradenbüschel seien p, p'. Um einen Punkt x zu transformieren, verbindet man ihn mit p und sucht zu px die entsprechende Gerade in dem Büschel mit dem Scheitel p'.

Bei einer quadratischen Verwandtschaft haben wir nun, den drei singulären Korrelationen des Büschels entsprechend, drei Paare zugeordneter Strahlenbüschel mit den Scheiteln $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$ und $p'_\alpha, p'_\beta, p'_\gamma$. Um einen Punkt x zu transformieren, verbindet man ihn mit p_α, p_β und transformiert die Verbingungslinien in Geraden durch p'_α, p'_β. Der Schnittpunkt der transformierten Geraden ist dann der Punkt x'. Dieser Punkt enthält auch die der Geraden xp_γ entsprechende Gerade durch p'_γ.

Damit ist gezeigt, daß sich die Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft eindeutig umkehrbar den Tripeln einer trilinearen Verwandtschaft zuordnen lassen, nämlich den Tripeln der von den Punkten der Ebene e zwischen den Büscheln mit den Scheiteln $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$ bestimmten Verwandtschaft.

Sechs einem $\mathfrak{R}_4$ angehörige Punkte von $\mathfrak{M}_2^6$ stellen nun einerseits sechs assoziierte Tripel, andererseits sechs assoziierte (d. h. linear-abhängige) Punktepaare dar. Daher gilt

Satz 11. *In der Ebene seien drei Geradenbüschel mit den Scheiteln $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$ einmal durch die Punkte der Ebene und dann durch zwei weitere Verwandtschaften trilinear aufeinander bezogen. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_6$ die den sechs gemeinsamen Tripeln der drei Verwandtschaften entsprechenden Punkte. Transformiert man sie vermöge einer quadratischen Verwandtschaft, welche das Dreieck $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$ zum Fundamentaldreieck hat, in das Punktsechstupel $p_1', p_2', \ldots, p_6'$, so bilden die Punktepaare $p_1p_1', p_2p_2', \ldots, p_6p_6'$ ein Sechstupel abhängiger Punktepaare* [7]).

7. *Das charakteristische Doppelverhältnis der $\mathfrak{C}^6$.* Das charakteristische Doppelverhältnis der ebenen Kurve 3. Ordnung c^3 erscheint nach dem Satze von Salmon als das Doppelverhältnis der vier Tangenten, die man von einem Punkte der Kurve aus an die Kurve legen kann. In dieser Gestalt eignet es sich nicht zur Übertragung auf die $\mathfrak{C}^6$, da die Tangenten, um auf den $\mathfrak{R}_5$ abgebildet zu werden, als Kurven 2. Ordnung vom Range 1 angesehen werden müssen, und weil das Geradenbüschel dabei nicht ein lineares, sondern ein quadratisches Gebilde liefert. Die Chaslessche Erzeugung der c^3 zeigt aber, daß das Doppelverhältnis der vier Tangenten, die von einem Kurvenpunkte ausgehen, gleich dem Doppelverhältnis der vier Kegelschnitte eines Büschels ist, welche die Kurve in zwei gemeinsamen Punkten und außerdem in einem dritten Punkte berühren. Die Übertragung liefert als charakteristisches Doppelverhältnis der $\mathfrak{C}^6$ das Doppelverhältnis der vier $\mathfrak{R}_4$, welche die $\mathfrak{C}^6$ in zwei gemeinsamen Punkten und einem dritten Punkte berühren (vgl. Satz 9) [8]). Von hier aus findet Rosati, indem er in einem Punkte der Sehnenmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_3^9$ von $\mathfrak{C}^6$ die Tangential-$\mathfrak{R}_4$ an die Sehnenmannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_4^3$ der Veroneseschen Flächen legt, daß dieses Doppelverhältnis gleich dem Doppelverhältnis dieser vier $\mathfrak{M}_4^3$ ist.

Hier ergibt sich dies Ergebnis auf folgendem Wege: Nach einem Satze von C. Le Paige [9]) ist das charakteristische Doppelverhältnis der c^3 gleich dem Doppelverhältnis der vier einkernigen Verwandtschaften im Büschel der trilinearen Verwandtschaften, welche die c^3 erzeugen. Zu den Parametern dieser Verwandtschaften gehören aber im Büschel (13) die Mannigfaltigkeiten 3. Ordnung, welche aus dem $\mathfrak{R}_5$ der Kurve $\mathfrak{C}^6$ die Sehnenmannigfaltigkeiten der vier durch die $\mathfrak{C}^6$ laufenden Veroneseschen Flächen ausschneiden.

---

[7]) F. London, a. a. O. [3]), S. 569.

[8]) C. Segre, Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles mêmes, Math. Ann. **27** (1886), S. 296—314; vgl. S. 298.

[9]) C. Le Paige, Sur la théorie des formes trilinéaires, C. R. Paris **93** (1881), S. 264—265. F. Folie, C. Le Paige, Mémoire sur les courbes du troisième ordre (Seconde partie), Mémoires de l'Académie de Bruxelles **45** (1882), S. 1—45.

Eingegangen 1. März 1938.

Ramanujans Vermutung über Zerfällungsanzahlen.

Von *G. N. Watson* in Birmingham.

Einleitung.

Die zahlentheoretische Funktion $p(n)$ ist für $n \geqq 1$ definiert als die Anzahl der Zerfällungen von n in beliebig viele gleiche oder ungleiche Summanden. Ferner wird $p(0) = 1$ gesetzt.

Die Zerfällungsanzahl $p(n)$ erscheint als Entwicklungskoeffizient in der Entwicklung der erzeugenden Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n = \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - x^\nu)}.$$

Diese Form der erzeugenden Funktion als unendliches Produkt geht auf Euler [1]) zurück.

Die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Funktion $p(n)$ mit Hilfe der Eulerschen erzeugenden Funktion haben Hardy und Ramanujan [2]) im Jahre 1917 begonnen. Das erste Glied ihrer berühmten Entwicklung ist

$$p(n) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right).$$

Im Zusammenhange mit der Hardy-Ramanujanschen Näherungsformel steht die von MacMahon [3]) berechnete Tafel der Funktion $p(n)$ für $n = 0$ bis 200. Kürzlich hat Gupta diese Tafel zuerst [4]) bis 300 und danach [5]) bis 600 weitergeführt.

Bekanntlich hat Ramanujan [6]) auf empirischem Wege aus der MacMahonschen Tafel die folgende unrichtige Vermutung hergeleitet:

Ist $\delta = 5^\alpha 7^\beta 11^\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \ldots)$ *und* $24\lambda \equiv 1 \pmod{\delta}$, $1 < \lambda < \delta$, *so ist für* $n \equiv \lambda \pmod{\delta}$ *stets* $p(n) \equiv 0 \pmod{\delta}$.

Es ist klar, daß diese Vermutung aus drei unabhängigen Vermutungen (nämlich Aussagen über Kongruenzeigenschaften in bezug auf 5^α, 7^β bzw. 11^γ getrennt) besteht. Aber die Behauptung über 7^β ist bekanntlich falsch. Diesen Irrtum richtigzustellen und einige Resultate über 5^α und 7^β herzuleiten, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Da die Untersuchung der Aussage über 11^γ recht langweilig ist, verschiebe ich den Beweis dieses Falles auf eine spätere Abhandlung.

---

[1]) L. Euler, Introductio in analysin infinitorum **1** (1748), § 305.

[2]) G. H. Hardy, S. Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc. (2) **17** (1918), S. 75—115; Collected Papers of S. Ramanujan (Cambridge, 1927), S. 276—309.

[3]) A. a. O. [2]), S. 114—115 bzw. 308.

[4]) H. Gupta, A table of partitions, Proc. London Math. Soc. (2) **39** (1935), S. 142—149.

[5]) H. Gupta, A table of partitions (II), Proc. London Math. Soc. (2) **42** (1937), S. 546—549.

[6]) S. Ramanujan, Some properties of $p(n)$, the number of partitions of n, Proc. Cambridge Phil. Soc. **19** (1919), S. 207—210.

Ich beginne nun mit der Formulierung der verbesserten Ergebnisse (Hauptsätze 1, 3, 4).

Hauptsatz 1. *Ist α eine natürliche Zahl und*[7] $24\lambda \equiv 1 \pmod{5^\alpha}$, $1 < \lambda < 5^\alpha$, *so ist für* $n \equiv \lambda \pmod{5^\alpha}$ *stets* $p(n) \equiv 0 \pmod{5^\alpha}$.

Z. B. enthält die MacMahonsche Tafel die Spezialfälle

$$p(4) = 5, \qquad p(9) = 5 \times 6, \qquad p(14) = 5 \times 27, \ldots,$$
$$p(24) = 5^2 \times 63, \qquad p(49) = 5^2 \times 6941, \ldots,$$
$$p(99) = 5^3 \times 13\,53839.$$

Ferner enthält die zweite Guptasche Tafel das Ergebnis

$$24 \times 599 = 23 \times 625 + 1 \equiv 1 \pmod{5^4},$$
$$p(599) = 5^4 \times 6\,96560\,33254\,45077\,57232.$$

Bekanntlich hat Lehmer[8] diesen Wert von $p(599)$ mittels der Hardy-Ramanujanschen Näherungsformel nachgerechnet.

Bisher sind Beweise der folgenden Spezialfälle dieses Hauptsatzes erschienen. Die Beweise für $\alpha = 1$ und 2 stammen von Ramanujan[9], Darling[10] und Krečmar[11]. Der Beweis für $\alpha = 3$ stammt von Krečmar[11].

In den Paragraphen 2 und 3 erhalte ich einen allgemeinen Beweis, der für jede natürliche Zahl α gültig ist. Ferner gebe ich den Beweis einer bis jetzt unveröffentlichten Ramanujanschen Vermutung, nämlich:

Hauptsatz 2. *Ist α eine gerade natürliche Zahl und* $24\lambda \equiv 1 \pmod{5^\alpha}$, $1 < \lambda < 5^\alpha$, *so ist für* $n \equiv 2 \cdot 5^\alpha + \lambda \pmod{5^{\alpha+1}}$ *und für* $n \equiv 4 \cdot 5^\alpha + \lambda \pmod{5^{\alpha+1}}$ *stets* $p(n) \equiv 0 \pmod{5^{\alpha+1}}$.

Als Beispiel zu diesem Satz bemerken wir, daß

$$p(74) = 5^3 \times 56716 \qquad \text{und} \qquad p(124) = 5^3 \times 227\,35524$$

ist.

Die zweite Vermutung besagt, daß für ganzzahliges β und $n \equiv \lambda \pmod{7^\beta}$, $24\lambda \equiv 1 \pmod{7^\beta}$ stets $p(n) \equiv 0 \pmod{7^\beta}$ ist. Im allgemeinen ist diese Vermutung falsch, in den Spezialfällen $\beta = 1, 2$ ist sie jedoch richtig. Die Beweise dieser Spezialfälle stammen von Ramanujan[12] und Darling[13]. Z. B. enthält die MacMahonsche Tafel die Spezialfälle

$$p(5) = 7, \qquad p(12) = 7 \times 11, \qquad p(19) = 7 \times 70, \ldots,$$
$$p(47) = 7^2 \times 2546, \qquad p(96) = 7^2 \times 24\,10496, \ldots.$$

Das Gegenbeispiel, daß

$$24 \times 243 = 343 \times 17 + 1 \equiv 1 \pmod{7^3},$$
$$p(243) = 343 \times 39\,06071\,70101 + 245 \equiv 245 \pmod{7^3}$$

---

[7]) Diese Bedingungen bestimmen bei gegebenem α die Zahl λ eindeutig.

[8]) D. H. Lehmer, On a conjecture of Ramanujan, Journ. London Math. Soc. **11** (1936), S. 114—118.

[9]) S. Ramanujan, a. a. O.[6]); Congruence properties of partitions, Math. Zeitschr. **9** (1921), S. 147—153; Collected Papers, S. 210—213, 232—238.

[10]) H. B. C. Darling, On Mr. Ramanujan's congruence properties of $p(n)$, Proc. Cambridge Phil. Soc. **19** (1919), S. 217—218; Proofs of certain identities and congruences enunciated by S. Ramanujan, Proc. London Math. Soc. (2) **19** (1921), S. 350—372.

[11]) W. Krečmar, Sur les propriétés de la divisibilité d'une fonction additive, Bull. Acad. Sci. URSS **7** (1933), S. 763—800.

[12]) A. a. O.[6]).

[13]) A. a. O.[10]).

ist, stammt von Chowla [14]), der es aus der ersten Guptaschen Tafel entnommen hat.

Es ist bequem, die richtige Behauptung betreffs 7^β folgendermaßen in zwei Teile zu zerlegen:

Hauptsatz 3. *Ist* $24\lambda \equiv 1 \pmod 7$, $1 < \lambda < 7$ (*so daß also* $\lambda = 5$ *ist*), *so ist für* $n \equiv \lambda \pmod 7$ *stets* $p(n) \equiv 0 \pmod 7$.

Hauptsatz 4. *Ist* β *eine natürliche Zahl und* $24\lambda \equiv 1 \pmod{7^{2\beta}}$, $1 < \lambda < 7^{2\beta}$, *so ist für* $n \equiv \lambda \pmod{7^{2\beta}}$ *stets* $p(n) \equiv 0 \pmod{7^{\beta+1}}$.

Hauptsatz 3 ist offenbar der oben erwähnte Satz, welchen Ramanujan und Darling bewiesen haben, während Hauptsatz 4 die berichtigte allgemeine Form der Ramanujanschen unrichtigen Vermutung ist.

Wir beachten ferner, daß der folgende Satz leicht aus den vorangehenden Sätzen abgeleitet werden kann:

Hauptsatz 5. *Ist* β *eine natürliche Zahl und* $24\lambda \equiv 1 \pmod{7^{2\beta+1}}$, $1 < \lambda < 7^{2\beta+1}$, *so ist für*

$$\text{(I) } n \equiv 2 \cdot 7^{2\beta+1} + \lambda \qquad \text{(II) } n \equiv 4 \cdot 7^{2\beta+1} + \lambda \qquad \text{(III) } n \equiv 5 \cdot 7^{2\beta+1} + \lambda$$

$\pmod{7^{2\beta+2}}$ *stets* $p(n) \equiv 0 \pmod{7^{\beta+2}}$.

In §3 und §5 handelt es sich ebenfalls um die Untersuchung verschiedener neuer Kongruenzeigenschaften von $p(n)$ bezüglich 5^α bzw. 7^β.

§ 1. Vorbereitende Bemerkungen über Thetafunktionen.

Bevor wir das Studium der Kongruenzeigenschaften von $p(n)$ anfangen, möchte ich verschiedene Bemerkungen über die benutzten Methoden vorrausschicken.

Außer den gewöhnlichen Bezeichnungen für Thetafunktionen gebrauche ich die Ramanujansche Bezeichnung, nämlich

$$\begin{aligned} f(a, b) &= 1 + (a + b) + ab(a^2 + b^2) + a^3 b^3 (a^3 + b^3) + \cdots \\ &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (ab)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} (a^\nu + b^\nu). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Z. B. haben wir

$$\vartheta_3(z, q) = f(qe^{2iz}, qe^{-2iz}), \quad \vartheta_4(z, q) = f(-qe^{2iz}, -qe^{-2iz}).$$

Ferner schreibe ich nach Ramanujan [15])

$$f(-x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - x^\nu), \tag{1.2}$$

woraus wir die Identität

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n \equiv \frac{1}{f(-x)}$$

erhalten können.

Das wohlbekannte Ergebnis, daß

$$f(-x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu\, x^{\frac{\nu(3\nu+1)}{2}} \tag{1.3}$$

---

[14]) S. Chowla, Congruence properties of partitions, Journ. London Math. Soc. **9** (1934), S. 247.

[15]) Man darf diese Funktion nicht mit der Weberschen Funktion $f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^{2n+1})$, $q = e^{\pi i \omega}$ verwechseln. In dieser Abhandlung gebrauche ich die Webersche Funktion nicht.

ist, stammt von Euler [16]). Folglich ist

$$f(-x) = f(-x, -x^2). \tag{1.4}$$

Das ähnliche Ergebnis, daß

$$f^3(-x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu (2\nu+1)\, x^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \tag{1.5}$$

ist, geht auf Jacobi [17]) zurück.

Man sieht leicht, daß Beziehungen zwischen $f(-x)$ und den Thetafunktionen bestehen. Da $p(n)$ die erzeugende Funktion $\frac{1}{f(-x)}$ besitzt, so lohnt es sich, die Beziehungen der Ramanujanschen Vermutungen mit den Eigenschaften der Thetafunktionen zu untersuchen. In der Tat gelingt der Beweis der Vermutungen mit Hilfe der Modulargleichungen, denen solche Thetafunktionen genügen.

Wir untersuchen jetzt die Gestalt der Modulargleichungen. Ist $q = e^{\pi i \tau}$, so ist

$$q^{\frac{1}{12}} f(-q^2) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-q^{2\nu}) = h(\tau)$$

mit der Tannery-Molkschen Bezeichnung. Bedeuten k, k' und K die Moduln und die Viertelperiode, die zu dem Periodenquotienten τ gehören, so folgt

$$q f^{12}(-q^2) = h^{12}(\tau) = \frac{4}{\pi^6} k^2 k'^2 K^6.$$

Ebenso bedeuten λ, λ' und Λ für ganzzahliges m die Moduln und die Viertelperiode, die zu dem Periodenquotienten $m\tau$ gehören, so daß

$$h^{12}(m\tau) = \frac{4}{\pi^6} \lambda^2 \lambda'^2 \Lambda^6$$

ist. Das Auftreten der Viertelperioden K, Λ in diesen Ausdrücken zeigt, daß keine algebraische Modulargleichung existieren kann, die nur die Funktionen $h(\tau)$, $h(m\tau)$ enthält. Dagegen läßt sich das Quadrat des Multiplikators $\frac{\Lambda}{K}$ als rationale Funktion der Moduln k, k', λ, λ' ausdrücken [18]). Hieraus sieht man leicht, daß der Quotient

$$\frac{h(m\tau)}{h(\tau)}$$

mittels der gewöhnlichen Modulargleichung zwischen k und λ als algebraische Funktion von k darstellbar ist. Ferner ist der Quotient

$$\frac{h(m^2\tau)}{h(m\tau)}$$

selbstverständlich gleich derselben algebraischen Funktion des entsprechenden Moduls λ.

Wir haben also drei algebraische Gleichungen folgender Art:

$$\Psi_1\left(\frac{h(m\tau)}{h(\tau)}, k\right) = 0, \quad \Psi_1\left(\frac{h(m^2\tau)}{h(m\tau)}, \lambda\right) = 0,$$
$$\Psi_2(k, \lambda) = 0,$$

die die Ausdrücke

$$\frac{h(m\tau)}{h(\tau)}, \quad \frac{h(m^2\tau)}{h(m\tau)}, \quad k, \quad \lambda$$

[16]) L. Euler, Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum, Novi Commentarii Acad. Sc. Petropolitanae **5** (1754/5, 1760), S. 75—83; Opera omnia (1) **2**, S. 390—398.

[17]) C. G. J. Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum (1829), § 66.

[18]) Vgl. Enneper-Müller, Elliptische Funktionen (2. Aufl. Halle, 1890), S. 449.

verbinden. Die dritte Gleichung ist natürlich die gewöhnliche Modulargleichung zwischen k und λ. Werden k und λ aus den drei Gleichungen eliminiert, so ergibt sich eine algebraische Gleichung, die nur noch die Ausdrücke

$$\frac{h(m\tau)}{h(\tau)}, \quad \frac{h(m^2\tau)}{h(\tau)}$$

enthält.

Diese Gleichung, welche sich unmittelbar als homogene Beziehung zwischen $h(\tau)$, $h(m\tau)$, $h(m^2\tau)$ darstellen läßt, nennen wir Modulargleichung m-ter Ordnung neuer Art. Man verdankt Ramanujan die Bildung der Modulargleichungen dieser Art in den Spezialfällen $m = 5$, $m = 7$, da er in sein Notizbuch diese speziellen Modulargleichungen ohne Beweis eingetragen hat. Hier sollen seine Ergebnisse in § 2 und § 4 bewiesen werden.

Nachdem man die Modulargleichungen neuer Art erhalten hat, kann man elementar mittels der Newtonschen Formeln für die Potenzsummen der Wurzeln algebraischer Gleichungen die Hauptsätze 1 bis 5 beweisen. Obgleich die Beweise ganz elementar sind, ist die Ausführung der Beweise meist eine rechnerisch schwierige Aufgabe.

Es ist hier bequem, zunächst zwei Hilfssätze über Thetafunktionen zu beweisen.

Hilfssatz 1. *Es gilt*

$$[\vartheta_4(3z - \pi\tau|3\tau) - e^{4iz}\,\vartheta_4(3z + \pi\tau)|3\tau)]\,\vartheta_4(z|\tau) = \vartheta_4(\tfrac{1}{2}\pi\tau|3\tau)\,\vartheta_4(2z - \tfrac{1}{2}\pi\tau|\tau).$$

Um diesen Hilfssatz zu beweisen, setzen wir zur Abkürzung

$$F_1(z) \equiv \vartheta_4(3z - \pi\tau|3\tau) - e^{4iz}\,\vartheta_4(3z + \pi\tau|3\tau),$$

$$F(z) \equiv \frac{F_1(z)\,\vartheta_4(z|\tau)}{\vartheta_4(2z - \tfrac{1}{2}\pi\tau|\tau)}.$$

Untersuchen wir jetzt, wie sich die Funktion $F(z)$ bei Vermehrung von z um π oder um $\pi\tau$ verhält. Erstens ist es leicht zu sehen, daß $F(z + \pi) = F(z)$ ist. Zweitens beachten wir, daß bei Vermehrung von z um $\pi\tau$ die vier Funktionen

$$\vartheta_4(3z - \pi\tau|3\tau), \quad e^{4iz}\,\vartheta_4(3z + \pi\tau|3\tau), \quad \vartheta_4(z|\tau), \quad \vartheta_4(2z - \tfrac{1}{2}\pi\tau|\tau)$$

sich mit den Faktoren

$$-e^{-\pi i\tau - 6iz}, \quad -e^{-\pi i\tau - 6iz}, \quad -e^{-\pi i\tau - 2iz}, \quad e^{-2\pi i\tau - 8iz}$$

multiplizieren. Also ist $F(z + \pi\tau) = F(z)$.

Ferner ist $\vartheta_4(2z - \frac{1}{2}\pi\tau|\tau)$ eine ganze Funktion von z, welche die Punkte

$$z = m\pi + n\pi\tau, \quad (m + \tfrac{1}{2})\pi + n\pi\tau, \quad (m + \tfrac{1}{2})\pi + (n + \tfrac{1}{2})\pi\tau, \quad m\pi + (n + \tfrac{1}{2})\pi\tau$$
$$(m, n = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty)$$

und nur diese als einfache Nullstellen besitzt.

Nun ist weiter

$$F_1(0) = 0,$$
$$F_1(\tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta_3(\pi\tau|3\tau) - \vartheta_3(\pi\tau|3\tau) = 0,$$
$$F_1(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi\tau) = \vartheta_3(\tfrac{1}{2}\pi\tau|3\tau) - e^{2\pi i\tau}\,\vartheta_3(\tfrac{5}{2}\pi\tau|3\tau) = 0,$$
$$\vartheta_4(\tfrac{1}{2}\pi\tau|\tau) = 0.$$

Folglich ist $F(z)$ eine Funktion von z ohne Pol, welche die Perioden π und $\pi\tau$ besitzt und daher nach dem Liouvilleschen Satz eine Konstante ist. Um diese Konstante zu bestimmen, setzen wir $z = \frac{1}{6}\pi\tau$. Da

$$F_1(\tfrac{1}{6}\pi\tau) = \vartheta_4(\tfrac{1}{2}\pi\tau|3\tau), \quad \vartheta_4(\tfrac{2}{6}\pi\tau - \tfrac{1}{2}\pi\tau|\tau) = \vartheta_4(\tfrac{1}{6}\pi\tau|\tau)$$

ist, so ist leicht zu sehen, daß

$$F(z) = F(\tfrac{1}{6}\pi\tau) = F_1(\tfrac{1}{6}\pi\tau) = \vartheta_4(\tfrac{1}{2}\pi\tau|3\tau)$$

ist, w. z. b. w.

Man erhält jetzt unmittelbar den

Hilfssatz 2. Es gilt

$$[f(-Z^3Q,-Z^{-3}Q^5)-Z^2f(-Z^3Q^5,-Z^{-3}Q)]f(-ZQ,-Z^{-1}Q)=f(-Z^2,-Z^{-2}Q^2)f(-Q^2).$$

In der Tat ist dieser Hilfssatz bloß eine andere Form des Hilfssatzes 1, worin man die Ramanujansche Bezeichnung gebraucht; ebenso setzt man

$$e^{\pi i\tau}=Q,\qquad e^{2iz}=Z.$$

Ich bin überzeugt, daß Ramanujan den Hilfssatz 2 entdeckt haben muß, obgleich er in seinem Notizbuch den allgemeinen Satz niemals erwähnt. Andereseits enthält das Notizbuch so viele Anwendungen von Spezialfällen des Satzes (z. B. die Eintragung der Formeln (2.1) und (4.1)), daß seine Unkenntnis des allgemeinen Satzes unbegreiflich sein würde.

§ 2. Die Modulargleichung 5-ter Ordnung.

Wir sind jetzt in der Lage das Studium der Modulargleichung 5-ter Ordnung anzufangen. Es ist zuerst zu bemerken, daß die Zahl n auf der rechten Seite der Formel

$$f(-q^2)=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{2\nu})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{3n^2+n}$$

die Werte $5m$, $5m\pm1$, $5m\pm2$ $(m=-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,+\infty)$ durchläuft. Folglich haben wir

$$\begin{aligned}f(-q^2)=&\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{75m^2+5m}-q^4\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{75m^2+35m}-q^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{75m^2-25m}\\&+q^{14}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{75m^2+65m}+q^{10}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{75m^2-55m}\\=&\,f(-q^{70},-q^{80})-q^4\,f(-q^{40},-q^{110})-q^2\,f(-q^{50},-q^{100})\\&+q^{14}f(-q^{10},-q^{140})+q^{10}f(-q^{20},-q^{130}).\end{aligned}$$

Setzen wir $x^{\frac{1}{10}}$ statt q, so folgt

$$\frac{f(-x^{\frac15})}{f(-x^5)}=\frac{f(-x^7,-x^8)+xf(-x^2,-x^{13})}{f(-x^5)}-x^{\frac15}-x^{\frac25}\frac{f(-x^4,-x^{11})-xf(-x,-x^{14})}{f(-x^5)},$$

d. h.

$$\frac{f(-x^{\frac15})}{f(-x^5)}=J_1-x^{\frac15}-x^{\frac25}J_2,$$

wobei J_1 und J_2 Funktionen von x bezeichnen, die als Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten darstellbar sind.

Nun zum Beweis des wichtigsten Hilfssatzes, daß $J_1J_2\equiv1$ ist!

Wir ersetzen Q in Hilfssatz 2 durch $x^{\frac52}$ und außerdem Z durch $x^{\frac32}$ bzw. $x^{\frac12}$. Auf diese Weise erhalten wir die Formeln [19])

$$[f(-x^7,-x^8)+xf(-x^2,-x^{13})]\,f(-x,-x^4)=f(-x^2,-x^3)\,f(-x^5),$$
$$[f(-x^4,-x^{11})-xf(-x,-x^{14})]\,f(-x^2,-x^3)=f(-x,-x^4)\,f(-x^5).$$

Folglich haben wir

$$J_1=\frac{f(-x^2,-x^3)}{f(-x,-x^4)},\qquad J_2=\frac{f(-x,-x^4)}{f(-x^2,-x^3)},$$

und daher ist $J_1J_2\equiv1$. Ferner ist

$$\frac{f(-x^{\frac15})}{f(-x^5)}=\frac{f(-x^2,-x^3)}{f(-x,-x^4)}-x^{\frac15}-x^{\frac25}\frac{f(-x,-x^4)}{f(-x^2,-x^3)}.\tag{2.1}$$

[19]) Wir benutzen hier die leicht beweisbare Formel $f(a^{-1},b)=a^{-1}f(a,ba^{-2})$.

Es ist zu bemerken, daß Ramanujan [20]) diesen Hilfssatz folgendermaßen elementar bewiesen hat. Nach (1.5) ist es klar, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\,x^{\frac{n(n+1)}{10}}\frac{f^3(-x^{\frac{1}{5}})}{f^3(-x^5)}=\frac{f^3(-x^{\frac{1}{5}})}{f^3(-x^5)}=(J_1-x^{\frac{1}{5}}-x^{\frac{2}{5}}J_2)^3$$
$$=(J_1^3-3xJ_2^2)-x^{\frac{1}{5}}(3J_1^2+xJ_2^3)+3x^{\frac{2}{5}}J_1(1-J_1J_2)$$
$$+x^{\frac{3}{5}}(6J_1J_2-1)-3x^{\frac{4}{5}}J_2(1-J_1J_2)$$

ist. Nun ergibt sich $n(n+1)\equiv 0, 2$ oder 6 (mod 10). Es ist unmöglich, daß $n(n+1)\equiv 4$ oder 8 (mod 10) ist. Durch Potenzenvergleichung ist jetzt unmittelbar klar, daß

$$3x^{\frac{2}{5}}J_1(1-J_1J_2)\equiv 0,\quad 3x^{\frac{4}{5}}J_2(1-J_1J_2)\equiv 0\quad (J_1\neq 0,\ J_2\neq 0)$$

ist, womit der Hilfssatz nach Ramanujan bewiesen ist.

Wir schreiben nun $\omega_r=e^{\frac{2r\pi i}{5}}$. Ferner schreiben wir zuweilen ω statt ω_r $(r=1,2,\ldots,5)$, so daß

$$\frac{f(-\omega x^{\frac{1}{5}})}{f(-x^5)}=J_1-\omega x^{\frac{1}{5}}-\frac{\omega^2 x^{\frac{2}{5}}}{J_1}$$

ist. Es ist jetzt leicht zu sehen, daß

$$\prod_{r=1}^{5}(1-\omega_r^{\nu}x^{\frac{\nu}{5}})=1-x^{\nu},\qquad \nu\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5),$$
$$\prod_{r=1}^{5}(1-\omega_r^{\nu}x^{\frac{\nu}{5}})=(1-x^{\frac{\nu}{5}})^5,\qquad \nu\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5),$$

ist und folglich

$$\prod_{r=1}^{5}f(-\omega_r x^{\frac{1}{5}})=\frac{f^6(-x)}{f(-x^5)}.$$

Es ergibt sich daher

$$\frac{f^6(-x)}{xf^6(-x^5)}=\prod_{r=1}^{5}\left(\frac{f(-\omega_r x^{\frac{1}{5}})}{\omega_r x^{\frac{1}{5}}f(-x^5)}\right)$$
$$=\prod_{r=1}^{5}\left(\frac{J_1}{\omega_r x^{\frac{1}{5}}}-\frac{\omega_r x^{\frac{1}{5}}}{J_1}-1\right)$$
$$=\frac{J_1^5}{x}-11-\frac{x}{J_1^5}$$
$$=\left(\frac{J_1}{x^{\frac{1}{5}}}-\frac{x^{\frac{1}{5}}}{J_1}\right)^5+5\left(\frac{J_1}{x^{\frac{1}{5}}}-\frac{x^{\frac{1}{5}}}{J_1}\right)^3+5\left(\frac{J_1}{x^{\frac{1}{5}}}-\frac{x^{\frac{1}{5}}}{J_1}\right)-11.$$

Ersetzen wir in diesem Ausdruck $\frac{J_1}{x^{\frac{1}{5}}}-\frac{x^{\frac{1}{5}}}{J_1}$ durch $1+\frac{f(-x^{\frac{1}{5}})}{x^{\frac{1}{5}}f(-x^5)}$, so folgt

$$\frac{f^5(-x^{\frac{1}{5}})}{xf^5(-x^5)}+5\,\frac{f^4(-x^{\frac{1}{5}})}{x^{\frac{4}{5}}f^4(-x^5)}+15\,\frac{f^3(-x^{\frac{1}{5}})}{x^{\frac{3}{5}}f^3(-x^5)}+25\,\frac{f^2(-x^{\frac{1}{5}})}{x^{\frac{2}{5}}f^2(-x^5)}+25\,\frac{f(-x^{\frac{1}{5}})}{x^{\frac{1}{5}}f(-x^5)}=\frac{f^6(-x)}{xf^6(-x^5)}$$

und schließlich

$$f^5(-x^{\frac{1}{5}})f(-x^5)+5\,x^{\frac{1}{5}}f^4(-x^{\frac{1}{5}})f^2(-x^5)+15\,x^{\frac{2}{5}}f^3(-x^{\frac{1}{5}})f^3(-x^5)$$
$$+25\,x^{\frac{3}{5}}f^2(-x^{\frac{1}{5}})f^4(-x^5)+25\,x^{\frac{4}{5}}f(-x^{\frac{1}{5}})f^5(-x^5)=f^6(-x).$$

---

[20]) Vgl. G. N. Watson, Theorems stated by Ramanujan (VII): Theorems on continued fractions, Journ. London Math. Soc. **4** (1929), S. 39—48.

Setzen wir nun

$$\Phi_5(A, B, C) \equiv A^5C + 5A^4C^2 + 15A^3C^3 + 25A^2C^4 + 25AC^5 - B^6,$$

so ergibt sich die neue Art der Modulargleichung 5-ter Ordnung in der Gestalt

$$\Phi_5(A, B, C) = 0,$$

wobei A, B, C natürlich $x^{\frac{1}{120}}f(-x^{\frac{1}{5}})$, $x^{\frac{1}{24}}f(-x)$, $x^{\frac{5}{24}}f(-x^5)$ bzw. (in den Tannery-Molkschen Bezeichnungen) $h\left(\frac{\tau}{5}\right)$, $h(\tau)$, $h(5\tau)$ bedeuten.

§ 3. Kongruenzeigenschaften von $p(n)$ bezüglich 5^α.

Um die in Hauptsatz 1 ausgeführten Eigenschaften von $p(n)$ zu beweisen, ist es bequem, die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)\, x^{24n+19}$, $\sum_{n=0}^{\infty} p(25n+24)\, x^{24n+23}$, usw. zu untersuchen. Zu diesem Zweck definieren wir einen Operator Ω_5 derart, daß

$$\Omega_5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{5n} x^n \tag{3. 11}$$

ist. Ist $F(x)$ eine beliebige eindeutige Funktion von x, so ist leicht zu sehen, daß

$$5\Omega_5 F(x) = \sum_{r=1}^{5} F(\omega_r x^{\frac{1}{5}}) \tag{3. 12}$$

sein muß.

Wir betrachten zunächst die Folge der oben erwähnten Exponenten, nämlich $24n-1$, $24n+19$, $24n+23$, usw.

Ist erstens $24n_0 - 1$ $(n_0 = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ durch 5 teilbar, so muß n_0 von der Form $5n_1 + 4$ $(n_1 = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ sein; dann ist $24n_0 - 1 = 5(24n_1 + 19)$. Ist zweitens $24n_1 + 19$ $(n_1 = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ durch 5 teilbar, so muß n_1 von der Form $5n_2 + 4$ $(n_2 = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ sein; dann ist $24n_1 + 19 = 5(24n_2 + 23)$. Ist drittens $24n_2 + 23$ $(n_2 = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ durch 5 teilbar, so muß n_2 von der Form $5n_3 + 3$ $(n_3 = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ sein; dann ist $24n_2 + 23 = 5(24n_3 + 19)$, usw. Ist im allgemeinen $24n_{2m} + 23$ $(n_{2m} = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ durch 5 teilbar, so muß n_{2m} von der Form $5n_{2m+1} + 3$ $(n_{2m+1} = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ sein; dann ist $24n_{2m} + 23 = 5(24n_{2m+1} + 19)$; ist ferner $24n_{2m+1} + 19$ $(n_{2m+1} = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ durch 5 teilbar, so muß n_{2m+1} von der Form $5n_{2m+2} + 4$ $(n_{2m+2} = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ sein; dann ist $24n_{2m+1} + 19 = 5(24n_{2m+2} + 23)$.

Nach diesen Betrachtungen ist offenbar, daß

$$\Omega_5 \sum_{n_0=0}^{\infty} p(n_0)\, x^{24n_0-1} = \sum_{n_1=0}^{\infty} p(5n_1 + 4)\, x^{24n_1+19}, \tag{3. 13}$$

$$\Omega_5 \sum_{n_1=0}^{\infty} p(5n_1 + 4)\, x^{24n_1+19} = \sum_{n_2=0}^{\infty} p(25n_2 + 24)\, x^{24n_2+23}, \tag{3. 14}$$

$$\Omega_5 \sum_{n_2=0}^{\infty} p(25n_2 + 24)\, x^{24n_2+23} = \sum_{n_3=0}^{\infty} p(125n_3 + 99)\, x^{24n_3+19},$$

usw. ist. Im allgemeinen haben wir

$$\Omega_5^{2m+1} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(5^{2m+1}n + \delta_m)\, x^{24n+19} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3. 15}$$

$$\Omega_5^{2m} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} p(5^{2m}\nu + \delta'_m)\, x^{24\nu+23} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3. 16}$$

wobei

$$\delta_0 = 4, \quad \delta'_{m+1} = \delta_m + 4 \cdot 5^{2m+1}, \quad \delta_m = \delta'_m + 3 \cdot 5^{2m}$$

ist. Durch Induktion überzeugt man sich leicht, daß

$$\delta_m = \frac{19 \cdot 5^{2m+1} + 1}{24}, \quad \delta'_m = \frac{23 \cdot 5^{2m} + 1}{24}$$

ist.

Betrachten wir nun die Ausdrücke

$$\Omega_5^{2m+1} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1}, \quad \Omega_5^{2m} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1}$$

von einem andern Gesichtspunkt.

In der in § 2 hergeleiteten Modulargleichung, nämlich

$$A^5C + 5A^4C^2 + 15A^3C^3 + 25A^2C^4 + 25AC^5 = B^6,$$

setzen wir

$$A = x^{\frac{1}{5}} f(-x^{\frac{24}{5}}), \quad B = xf(-x^{24}), \quad C = x^5 f(-x^{120}).$$

Ferner setzen wir zur Abkürzung

$$X = \frac{B}{A}, \quad Y = \frac{C}{B},$$

so daß

$$X^5 - 25X^4Y^5 - 25X^3Y^4 - 15X^2Y^3 - 5XY^2 - Y = 0 \tag{3.2}$$

ist. Bei gegebenem x und $Y \equiv \frac{x^5 f(-x^{120})}{xf(-x^{24})}$ sind die Wurzeln dieser Gleichung 5-ten Grades in X gleich

$$\frac{xf(-x^{24})}{\omega_r x^{\frac{1}{5}} f(-\omega_r^{24} x^{\frac{24}{5}})}, \qquad (r = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Nun ist nach (3. 12) für ganzzahliges ν

$$5\Omega_5 Y^\nu = \sum_{r=1}^{5} \left(\frac{xf(-x^{24})}{\omega_r x^{\frac{1}{5}} f(-\omega_r^{24} x^{\frac{24}{5}})} \right)^\nu.$$

Es ist wichtig zu bemerken, daß der Ausdruck auf der rechten Seite gleich der Summe der ν-ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung (3.2) in X ist.

Es ist bequem, diese Summe der ν-ten Potenzen der Wurzeln in der Form

$$5S_\nu$$

zu schreiben, so daß

$$\Omega_5 Y^\nu = S_\nu \tag{3.21}$$

ist. Ferner bestätigt man leicht mit Hilfe von (3. 12), daß

$$\Omega_5\left(\frac{C^\nu}{B^\nu}\right) = B\Omega_5\left(\frac{C^{\nu-1}}{B^\nu}\right) \tag{3.22}$$

ist; folglich ist

$$\Omega_5\left(\frac{C^{\nu-1}}{B^\nu}\right) = \frac{S_\nu}{B}. \tag{3.23}$$

Es ist jetzt klar, daß

$$\Omega_5 \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1} = \Omega_5\left(\frac{1}{xf(-x^{24})}\right) = \frac{S_1}{B} = \frac{5C^5}{B^6} \tag{3.31}$$

ist [21]). Ferner ist

$$\Omega_5^2 \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1} = \Omega_5\left(\frac{5C^5}{B^6}\right) = \frac{5S_6}{B}. \tag{3.32}$$

---

[21]) Dieses Ergebnis hat Ramanujan in der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)\, x^n = 5\, \frac{(1-x^5)^5\,(1-x^{10})^5\,(1-x^{15})^5 \cdots}{(1-x)^6\,(1-x^2)^6\,(1-x^3)^6 \cdots}$$

angegeben. S. a. a. O. [6]).

Durch wiederholte Anwendung der Newtonschen Formeln für Potenzsummen überzeugt man sich leicht, daß

$$\begin{aligned}
S_1 &= 5\,Y^5,\\
S_2 &= 5^3\,Y^{10} + 2\cdot 5\,Y^4,\\
S_3 &= 5^5\,Y^{15} + 3\cdot 5^3\,Y^9 + 9\,Y^3,\\
S_4 &= 5^7\,Y^{20} + 4\cdot 5^5\,Y^{14} + 22\cdot 5^2\,Y^8 + 4\,Y^2,\\
S_5 &= 5^9\,Y^{25} + 5\cdot 5^7\,Y^{19} + 40\cdot 5^4\,Y^{13} + 20\cdot 5^2\,Y^7 + Y,\\
S_6 &= 5^{11}\,Y^{30} + 6\cdot 5^9\,Y^{24} + 63\cdot 5^6\,Y^{18} + 52\cdot 5^4\,Y^{12} + 63\cdot 5\,Y^6
\end{aligned}$$

ist. Aus dem letzten Ergebnis bestätigt man, daß

$$(3.33)\quad \Omega_5^2 \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\,x^{24n-1} = 5^2\left(\frac{63\,C^6}{B^7} + \frac{52\cdot 5^3 C^{12}}{B^{13}} + \frac{63\cdot 5^5 C^{18}}{B^{19}} + \frac{6\cdot 5^8 C^{24}}{B^{25}} + \frac{5^{10} C^{30}}{B^{31}}\right).$$

Da die Koeffizienten in der Entwicklung von $\dfrac{C^{\nu-1}}{B^{\nu}}$ nach Potenzen von x für ganzzahliges ν selbstverständlich ganzzahlig sind, so sieht man aus (3.31) und (3.33) mit Hilfe von (3.13) und (3.14), daß

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5 \quad \text{und} \quad p(25n+24) \equiv 0 \pmod{25}$$

sein müssen.

Wünscht man weitere Ergebnisse zu erhalten, so muß man natürlich Kongruenzeigenschaften der Koeffizienten in der Entwicklung von S_ν nach Potenzen von Y ableiten. Wenn man fortfährt, die Newtonschen Formeln für Potenzsummen anzuwenden, so ergeben sich folgende durch Induktion leicht beweisbare Formeln:

$$\begin{aligned}
S_{5\nu+1} &= \sum_{n=0}^{2\nu} \varrho_{n,\nu,1}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+\nu+5} + \sum_{n=0}^{2\nu-1} \varrho'_{n,\nu,1}\,5^{5n+4}\,Y^{12n+\nu+11},\\
S_{5\nu+2} &= \sum_{n=0}^{2\nu} \varrho_{n,\nu,2}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+\nu+4} + \sum_{n=0}^{2\nu} \varrho'_{n,\nu,2}\,5^{5n+3}\,Y^{12n+\nu+10},\\
S_{5\nu+3} &= \sum_{n=0}^{2\nu+1} \varrho_{n,\nu,3}\,5^{5n}\,Y^{12n+\nu+3} + \sum_{n=0}^{2\nu} \varrho'_{n,\nu,3}\,5^{5n+3}\,Y^{12n+\nu+9},\\
S_{5\nu+4} &= \sum_{n=0}^{2\nu+1} \varrho_{n,\nu,4}\,5^{5n}\,Y^{12n+\nu+2} + \sum_{n=0}^{2\nu+1} \varrho'_{n,\nu,4}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+\nu+8},\\
S_{5\nu+5} &= \varrho_{0,\nu,5}\,Y^{\nu+1} + \sum_{n=1}^{2\nu+2} \varrho_{n,\nu,5}\,5^{5n-1}\,Y^{12n+\nu+1} + \sum_{n=0}^{2\nu+1} \varrho'_{n,\nu,5}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+\nu+7},
\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $\varrho_{n,\nu,r}$, $\varrho'_{n,\nu,r}$ $(r = 1, 2, 3, 4, 5)$ ganzzahlig sein müssen und ν die ganzen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ durchläuft.

Es ist bequem, die letzte Formel in der Form

$$S_{5\nu+5} = \sum_{n=0}^{2\nu+2} \varrho^*_{n,\nu,5}\,5^{5n-1}\,Y^{12n+\nu+1} + \sum_{n=0}^{2\nu+1} \varrho'_{n,\nu,5}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+\nu+7}$$

zu schreiben, wobei der Stern die Ersetzung von $\varrho_{0,\nu,5}$ durch $5\varrho_{0,\nu,5}$ bezeichnet.

Was die Exponenten der Potenzen von Y und die oberen Grenzen der Summen betrifft, ist die Richtigkeit dieser Formeln wegen der Newtonschen Formeln offenbar. Es bleibt nur noch übrig, die Ganzzahligkeit der Koeffizienten $\varrho_{n,\nu,r}$, $\varrho'_{n,\nu,r}$ zu beweisen. Jedoch ist es bequem, eine kleine Veränderung vorzunehmen, nämlich die oberen Grenzen der Summen durch ∞ zu ersetzen. Natürlich muß man dann die Zahlen $\varrho_{n,\nu,r}$, $\varrho'_{n,\nu,r}$ für hinreichend große Werte von n gleich Null setzen, so daß keine Konvergenzschwierigkeiten auftreten.

Wir führen den Beweis der Ganzzahligkeit von $\varrho_{n,\nu,r}$, $\varrho'_{n,\nu,r}$ mittels Induktion. Die Behauptungen sind offenbar richtig für $\nu = 0$. Wie nehmen sie jetzt für einen speziellen Wert von ν als richtig an und zeigen, daß sie dann für $\nu + 1$ richtig sind.

Auf Grund der Newtonschen Formel ist

$$\begin{aligned}
S_{5\nu+6} &= 25\,Y^5 S_{5\nu+5} + 25\,Y^4 S_{5\nu+4} + 15\,Y^3 S_{5\nu+3} + 5\,Y^2 S_{5\nu+2} + Y S_{5\nu+1} \\
&= \varrho_{0,\nu,5}\,5^2\,Y^{\nu+6} + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_{n,\nu,5}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+\nu+6} + \sum_{n=0}^{\infty} \varrho'_{n,\nu,5}\,5^{5n+4}\,Y^{12n+\nu+12} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_{n,\nu,4}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+\nu+6} + \sum_{n=0}^{\infty} \varrho'_{n,\nu,4}\,5^{5n+4}\,Y^{12n+\nu+12} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} 3\varrho_{n,\nu,3}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+\nu+6} + \sum_{n=0}^{\infty} 3\varrho'_{n,\nu,3}\,5^{5n+4}\,Y^{12n+\nu+12} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_{n,\nu,2}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+\nu+6} + \sum_{n=0}^{\infty} \varrho'_{n,\nu,2}\,5^{5n+4}\,Y^{12n+\nu+12} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_{n,\nu,1}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+\nu+6} + \sum_{n=0}^{\infty} \varrho'_{n,\nu,1}\,5^{5n+4}\,Y^{12n+\nu+12} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_{n,\nu+1,1}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+(\nu+1)+5} + \sum_{n=0}^{\infty} \varrho'_{n,\nu+1,1}\,5^{5n+4}\,Y^{12n+(\nu+1)+11},
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\varrho_{0,\nu+1,1} &= \varrho_{0,\nu,1} + 5\varrho_{0,\nu,2} + 3\varrho_{0,\nu,3} + 5\varrho_{0,\nu,4} + 5\varrho_{0,\nu,5}, \\
\varrho_{n,\nu+1,1} &= \varrho_{n,\nu,1} + 5\varrho_{n,\nu,2} + 3\varrho_{n,\nu,3} + 5\varrho_{n,\nu,4} + \varrho_{n,\nu,5} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \\
\varrho'_{n,\nu+1,1} &= \varrho'_{n,\nu,1} + \varrho'_{n,\nu,2} + 3\varrho'_{n,\nu,3} + \varrho'_{n,\nu,4} + \varrho'_{n,\nu,5} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),
\end{aligned}$$

sind. Hieraus folgt, daß $\varrho_{n,\nu+1,1}$, $\varrho'_{n,\nu+1,1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ganzzahlig sind. Ebenso findet man schrittweise, daß $\varrho_{n,\nu+1,2}$, $\varrho'_{n,\nu+1,2}$; $\varrho_{n,\nu+1,3}$, $\varrho'_{n,\nu+1,3}$; $\varrho_{n,\nu+1,4}$, $\varrho'_{n,\nu+1,4}$; $\varrho_{n,\nu+1,5}$, $\varrho'_{n,\nu+1,5}$ ganzzahlig sind. Hieraus erkennt man leicht durch Induktion die Gültigkeit der Behauptungen.

Es ist jetzt möglich, die folgenden Ergebnisse mittels Induktion zu beweisen:

$$(3.41)\qquad \Omega_5^{2m}\left(\frac{1}{B}\right) = 5^{2m}\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{m,\nu}\,5^{5\nu}\,\frac{C^{12\nu+6}}{B^{12\nu+7}} + 5^{2m+3}\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda'_{m,\nu}\,5^{5\nu}\,\frac{C^{12\nu+12}}{B^{12\nu+13}},$$

$$(3.42)\qquad \Omega_5^{2m+1}\left(\frac{1}{B}\right) = 5^{2m+1}\sum_{N=0}^{\infty} \mu_{m,N}\,5^{5N}\,\frac{C^{12N+5}}{B^{12N+6}} + 5^{2m+3}\sum_{N=0}^{\infty} \mu'_{m,N}\,5^{5N}\,\frac{C^{12N+11}}{B^{12N+12}}.$$

Das Wesentliche an diesen Ergebnissen ist die Ganzzahligkeit der Koeffizienten $\lambda_{m,\nu}$, $\lambda'_{m,\nu}$, $\mu_{m,N}$, $\mu'_{m,N}$; wir bemerken, daß diese Koeffizienten für hinreichend große Werte von ν und N gleich Null sind; folglich sind die scheinbar unendlichen Reihen tatsächlich endlich.

Die Behauptung (3.41) ist für $m = 1$ offenbar richtig. Wir nehmen sie jetzt für einen speziellen Wert von m als richtig an und zeigen, daß die Behauptung (3.42) für diesen Wert von m richtig ist. Aus der Richtigkeit von (3.42) können wir dann die Richtigkeit von (3.41) nach Ersetzung von m durch $m + 1$ herleiten. Hieraus bestätigt man leicht die Gültigkeit der Formeln durch Induktion.

Ist die Behauptung (3.41) richtig, so folgt nach (3.23)

$$\Omega_5^{2m+1}\left(\frac{1}{B}\right) = 5^{2m}\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{m,\nu}\,5^{5\nu}\,\frac{S_{12\nu+7}}{B} + 5^{2m+3}\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda'_{m,\nu}\,5^{5\nu}\,\frac{S_{12\nu+13}}{B},$$

d. h.

$$\Omega_5^{2m+1}\left(\frac{1}{B}\right) = \sum_{r=0}^{4}\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{m,5\nu+r}\,5^{25\nu+5r+2m}\,\frac{S_{60\nu+12r+7}}{B} + \sum_{r=0}^{4}\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda'_{m,5\nu+r}\,5^{25\nu+5r+2m+3}\,\frac{S_{60\nu+12r+13}}{B}$$

durch Zerlegung der Reihen auf der rechten Seite.

Mit Hilfe der durch Induktion abgeleiteten Ausdrücke für S_ν läßt diese Formel sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\Omega_5^{2m+1}\left(\frac{1}{B}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{B}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\lambda_{m,5\nu}\,5^{25\nu+2m}\{\varrho_{n,12\nu+1,2}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+12\nu+5}+\varrho'_{n,12\nu+1,2}\,5^{5n+3}\,Y^{12n+12\nu+11}\}\\
&\quad+\lambda'_{m,5\nu}\,5^{25\nu+2m+3}\{\varrho_{n,12\nu+2,3}\,5^{5n}\,Y^{12n+12\nu+5}+\varrho'_{n,12\nu+2,3}\,5^{5n+3}\,Y^{12n+12\nu+11}\}\\
&\quad+\lambda_{m,5\nu+1}\,5^{25\nu+2m+5}\{\varrho_{n,12\nu+3,4}\,5^{5n}\,Y^{12n+12\nu+5}+\varrho'_{n,12\nu+3,4}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+12\nu+11}\}\\
&\quad+\lambda'_{m,5\nu+1}\,5^{25\nu+2m+8}\{\varrho^{*}_{n,12\nu+4,5}\,5^{5n-1}\,Y^{12n+12\nu+5}+\varrho'_{n,12\nu+4,5}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+12\nu+11}\}\\
&\quad+\lambda_{m,5\nu+2}\,5^{25\nu+2m+10}\{\varrho_{n,12\nu+6,1}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+12\nu+11}+\varrho'_{n,12\nu+6,1}\,5^{5n+4}\,Y^{12n+12\nu+17}\}\\
&\quad+\lambda'_{m,5\nu+2}\,5^{25\nu+2m+13}\{\varrho_{n,12\nu+7,2}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+12\nu+11}+\varrho'_{n,12\nu+7,2}\,5^{5n+3}\,Y^{12n+12\nu+17}\}\\
&\quad+\lambda_{m,5\nu+3}\,5^{25\nu+2m+15}\{\varrho_{n,12\nu+8,3}\,5^{5n}\,Y^{12n+12\nu+11}+\varrho'_{n,12\nu+8,3}\,5^{5n+3}\,Y^{12n+12\nu+17}\}\\
&\quad+\lambda'_{m,5\nu+3}\,5^{25\nu+2m+18}\{\varrho_{n,12\nu+9,4}\,5^{5n}\,Y^{12n+12\nu+11}+\varrho'_{n,12\nu+9,4}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+12\nu+17}\}\\
&\quad+\lambda_{m,5\nu+4}\,5^{25\nu+2m+20}\{\varrho^{*}_{n,12\nu+10,5}\,5^{5n-1}\,Y^{12n+12\nu+11}+\varrho'_{n,12\nu+10,5}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+12\nu+17}\}\\
&\quad+\lambda'_{m,5\nu+4}\,5^{25\nu+2m+23}\{\varrho_{n,12\nu+12,1}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+12\nu+17}+\varrho'_{n,12\nu+12,1}\,5^{5n+4}\,Y^{12n+12\nu+23}\}\Big].
\end{aligned}$$

Wenn man die Reihen auf der rechten Seite wieder ordnet, so erhält man den Ausdruck von $\Omega_5^{2m+1}\left(\frac{1}{B}\right)$ gemäß (3.42), und man hat noch zu zeigen, daß die Koeffizienten $\mu_{m,N}$, $\mu'_{m,N}$ ganzzahlig sind. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{aligned}
\mu_{m,N} &= \sum_{\nu=0}^{N}\{\lambda_{m,5\nu}\,\varrho_{N-\nu,12\nu+1,2}\,5^{20\nu}+\lambda'_{m,5\nu}\,\varrho_{N-\nu,12\nu+2,3}\,5^{20\nu+2}+\lambda_{m,5\nu+1}\,\varrho_{N-\nu,12\nu+3,4}\,5^{20\nu+4}\\
&\quad+\lambda'_{m,5\nu+1}\,\varrho^{*}_{N-\nu,12\nu+4,5}\,5^{20\nu+6}\}\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{N-1}\{\lambda_{m,5\nu+2}\,\varrho'_{N-\nu-1,12\nu+6,1}\,5^{20\nu+8}+\lambda'_{m,5\nu+2}\,\varrho'_{N-\nu-1,12\nu+7,2}\,5^{20+10}\\
&\quad+\lambda_{m,5\nu+3}\,\varrho'_{N-\nu-1,12\nu+8,3}\,5^{20\nu+12}+\lambda'_{m,5\nu+3}\,\varrho'_{N-\nu-1,12\nu+9,4}\,5^{20\nu+14}\\
&\quad+\lambda_{m,5\nu+4}\,\varrho'_{N-\nu-1,12\nu+10,5}\,5^{20\nu+16}+\lambda'_{m,5\nu+4}\,\varrho_{N-\nu-1,12\nu+12,1}\,5^{20\nu+18}\},\\
\mu'_{m,N} &= \sum_{\nu=0}^{N}\{\lambda_{m,5\nu}\,\varrho'_{N-\nu,12\nu+1,2}\,5^{20\nu}+\lambda'_{m,5\nu}\,\varrho'_{N-\nu,12\nu+2,3}\,5^{20\nu+3}+\lambda_{m,5\nu+1}\,\varrho'_{N-\nu,12\nu+3,4}\,5^{20\nu+4}\\
&\quad+\lambda'_{m,5\nu+1}\,\varrho'_{N-\nu,12\nu+4,5}\,5^{20\nu+7}+\lambda_{m,5\nu+2}\,\varrho_{N-\nu,12\nu+6,1}\,5^{20\nu+8}+\lambda'_{m,5\nu+2}\,\varrho_{N-\nu,12\nu+7,2}\,5^{20\nu+11}\\
&\quad+\lambda_{m,5\nu+3}\,\varrho_{N-\nu,12\nu+8,3}\,5^{20\nu+12}+\lambda'_{m,5\nu+3}\,\varrho_{N-\nu,12\nu+9,4}\,5^{20\nu+15}+\lambda_{m,5\nu+4}\,\varrho^{*}_{N-\nu,12\nu+10,5}\,5^{20\nu+16}\}\\
&\quad+\sum_{\nu=0}^{N-1}\lambda'_{m,5\nu+4}\,\varrho'_{N-\nu-1,12\nu+12,1}\,5^{20\nu+19}.
\end{aligned}$$

Sind $\lambda_{m,\nu}$ und $\lambda'_{m,\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$) ganzzahlig, so besagen diese Formeln, daß $\mu_{m,N}$ und $\mu'_{m,N}$ ($N = 0, 1, 2, \ldots, \infty$) auch ganzzahlig sind. Hiermit haben wir den ersten Teil des erforderlichen Induktionsschlusses vollendet.

Nehmen wir jetzt das Ergebnis (3.42) an, so folgt nach (3.23)

$$\Omega_5^{2m+2}\left(\frac{1}{B}\right) = 5^{2m+1}\sum_{N=0}^{\infty}\mu_{m,N}\,5^{5N}\frac{S_{12N+6}}{B}+5^{2m+3}\sum_{N=0}^{\infty}\mu_{m,N}\,5^{5N}\frac{S_{12N+12}}{B},$$

d. h.

$$\Omega_5^{2m+2}\left(\frac{1}{B}\right) = \sum_{r=0}^{4}\sum_{N=0}^{\infty} \mu_{m,5N+r}\, 5^{25N+5r+2m+1}\, \frac{S_{60N+12r+6}}{B} + \sum_{r=0}^{4}\sum_{N=0}^{\infty} \mu'_{m,5N+r}\, 5^{25N+5r+2m+3}\, \frac{S_{60N+12r+12}}{B}$$

durch Zerlegung der Reihen auf der rechten Seite.

Mit Hilfe der durch Induktion abgeleiteten Formeln für S_N läßt diese Formel sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
&\Omega_5^{2m+2}\left(\frac{1}{B}\right)\\
&= \frac{1}{B}\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\mu_{m,5N}\,5^{25N+2m+1}\,\{\varrho_{n,12N+1,1}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+12N+6} + \varrho'_{n,12N+1,1}\,5^{5n+4}\,Y^{12n+12N+12}\}\\
&\quad+\mu'_{m,5N}\,5^{25N+2m+3}\,\{\varrho_{n,12N+2,2}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+12N+6} + \varrho'_{n,12N+2,2}\,5^{5n+3}\,Y^{12n+12N+12}\}\\
&\quad+\mu_{m,5N+1}\,5^{25N+2m+6}\,\{\varrho_{n,12N+3,3}\,5^{5n}\,Y^{12n+12N+6} + \varrho'_{n,12N+3,3}\,5^{5n+3}\,Y^{12n+12N+12}\}\\
&\quad+\mu'_{m,5N+1}\,5^{25N+2m+8}\,\{\varrho_{n,12N+4,4}\,5^{5n}\,Y^{12n+12N+6} + \varrho'_{n,12N+4,4}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+12N+12}\}\\
&\quad+\mu_{m,5N+2}\,5^{25N+2m+11}\,\{\varrho^{*}_{n,12N+5,5}\,5^{5n-1}\,Y^{12n+12N+6} + \varrho'_{n,12N+5,5}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+12N+12}\}\\
&\quad+\mu'_{m,5N+2}\,5^{25N+2m+13}\,\{\varrho_{n,12N+7,1}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+12N+12} + \varrho'_{n,12N+7,1}\,5^{5n+4}\,Y^{12n+12N+18}\}\\
&\quad+\mu_{m,5N+3}\,5^{25N+2m+16}\,\{\varrho_{n,12N+8,2}\,5^{5n+1}\,Y^{12n+12N+12} + \varrho'_{n,12N+8,2}\,5^{5n+3}\,Y^{12n+12N+18}\}\\
&\quad+\mu'_{m,5N+3}\,5^{25N+2m+18}\,\{\varrho_{n,12N+9,3}\,5^{5n}\,Y^{12n+12N+12} + \varrho'_{n,12N+9,3}\,5^{5n+3}\,Y^{12n+12N+18}\}\\
&\quad+\mu_{m,5N+4}\,5^{25N+2m+21}\,\{\varrho_{n,12N+10,4}\,5^{5n}\,Y^{12n+12N+12} + \varrho'_{n,12N+10,4}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+12N+18}\}\\
&\quad+\mu'_{m,5N+4}\,5^{25N+2m+23}\,\{\varrho^{*}_{n,12N+11,5}\,5^{5n-1}\,Y^{12n+12N+12} + \varrho'_{n,12N+11,5}\,5^{5n+2}\,Y^{12n+12N+18}\}\Big].
\end{aligned}$$

Wenn man die Reihen auf der rechten Seite wieder ordnet, so erhält man für $\Omega_5^{2m+2}\left(\frac{1}{B}\right)$ den Ausdruck (3.41) mit der Ersetzung von m durch $m+1$, und man hat noch zu zeigen, daß die Koeffizienten $\lambda_{m+1,\nu}$, $\lambda'_{m+1,\nu}$ ganzzahlig sind.

Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$\begin{aligned}
\lambda_{m+1,\nu} &= \sum_{N=0}^{\nu}\{\mu_{m,5N}\,\varrho_{\nu-N,12N+1,1}\,5^{20N} + \mu'_{m,5N}\,\varrho_{\nu-N,12N+2,2}\,5^{20N+2} + \mu_{m,5N+1}\,\varrho_{\nu-N,12N+3,3}\,5^{20N+4}\\
&\quad+\mu'_{m,5N+1}\,\varrho_{\nu-N,12N+4,4}\,5^{20N+6} + \mu_{m,5N+2}\,\varrho^{*}_{\nu-N,12N+5,5}\,5^{20N+8}\}\\
&+\sum_{N=0}^{\nu-1}\{\mu'_{m,5N+2}\,\varrho'_{\nu-N-1,12N+7,1}\,5^{20N+10} + \mu_{m,5N+3}\,\varrho'_{\nu-N-1,12N+8,2}\,5^{20N+12} + \mu'_{m,5N+3}\,\varrho'_{\nu-N-1,12N+9,3}\,5^{20N+14}\\
&\quad+\mu_{m,5N+4}\,\varrho'_{\nu-N-1,12N+10,4}\,5^{20N+16} + \mu'_{m,5N+4}\,\varrho'_{\nu-N-1,12N+11,5}\,5^{20N+18}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda'_{m+1,\nu} &= \sum_{N=0}^{\nu}\{\mu_{m,5N}\,\varrho'_{\nu-N,12N+1,1}\,5^{20N} + \mu'_{m,5N}\,\varrho'_{\nu-N,12N+2,2}\,5^{20N+1} + \mu_{m,5N+1}\,\varrho'_{\nu-N,12N+3,3}\,5^{20N+4}\\
&\quad+\mu'_{m,5N+1}\,\varrho'_{\nu-N,12N+4,4}\,5^{20N+5} + \mu_{m,5N+2}\,\varrho'_{\nu-N,12N+5,5}\,5^{20N+8}\\
&+\mu'_{m,5N+2}\,\varrho_{\nu-N,12N+7,1}\,5^{20N+9} + \mu_{m,5N+3}\,\varrho_{\nu-N,12N+8,2}\,5^{20N+12} + \mu'_{m,5N+3}\,\varrho_{\nu-N,12N+9,3}\,5^{20N+13}\\
&+\mu_{m,5N+4}\,\varrho_{\nu-N,12N+10,4}\,5^{20N+16} + \mu'_{m,5N+4}\,\varrho^{*}_{\nu-N,12N+11,5}\,5^{20N+17}\}.
\end{aligned}$$

Sind $\mu_{m,N}$ und $\mu'_{m,N}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ ganzzahlig, so besagen diese Formeln, daß $\lambda_{m+1,\nu}$ und $\lambda'_{m+1,\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ auch ganzzahlig sind. Hiermit haben wir den vollständigen Beweis der Formeln (3.41) und (3.42) mittels Induktion beendigt.

Schreiben wir jetzt die Ergebnisse (3.41) und (3.42) mit Hilfe von (3.16) und (3.15) in der Form

$$(3.43)\quad \sum_{n=0}^{\infty} p(5^{2m}n+\delta'_m)\,x^{24n+23} = 5^{2m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_{m,\nu}\,5^{5\nu}\frac{C^{12\nu+6}}{B^{12\nu+7}} + 5^{2m+3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda'_{m,\nu}\,5^{5\nu}\frac{C^{12\nu+12}}{B^{12\nu+13}}$$
$$(m=1,2,3,\ldots),$$

$$(3.44)\quad \sum_{n=0}^{\infty} p(5^{2m+1}n+\delta_m)\,x^{24n+19} = 5^{2m+1}\sum_{N=0}^{\infty}\mu_{m,N}\,5^{5N}\frac{C^{12N+5}}{B^{12N+6}} + 5^{2m+3}\sum_{N=0}^{\infty}\mu'_{m,N}\,5^{5N}\frac{C^{12N+11}}{B^{12N+12}}$$
$$(m=0,1,2,\ldots),$$

und beachten wir, daß die Koeffizienten in den Entwicklungen von $\frac{C^{6\nu+6}}{B^{6\nu+7}}$ und $\frac{C^{6N+5}}{B^{6N+6}}$ nach Potenzen von x ganzzahlig sein müssen, so ergibt sich für $n=0,1,2,\ldots$

$$p\left(5^{2m}n+\frac{23\cdot 5^{2m}+1}{24}\right)\equiv 0 \pmod{5^{2m}} \qquad (m=1,2,3,\ldots),$$

$$p\left(5^{2m+1}n+\frac{19\cdot 5^{2m+1}+1}{24}\right)\equiv 0 \pmod{5^{2m+1}} \qquad (m=0,1,2,\ldots),$$

womit Hauptsatz 1 bewiesen ist.

Es ist jetzt leicht, Hauptsatz 2 zu beweisen. Wir betrachten die Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{C^6}{B^7}\equiv\left(\frac{B^5}{C}\right)^{-2}C^4B^3.$$

Da

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1-x^{24n})^5}{(1-x^{120n})}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-5\,\frac{x^{24n}-2x^{48n}+2x^{72n}-x^{96n}}{1-x^{120n}}\right)$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{B^5}{C}=1+5\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,x^{24n},$$

wo die Koeffizienten α_n ganzzahlig sind. Man sieht jetzt, daß

$$\left(\frac{B^5}{C}\right)^{-2}=1+5\sum_{n=6}^{\infty}\beta_n\,x^{24n}$$

auch ist, wo die Koeffizienten β_n ganzzahlig sind. Folglich haben wir

$$(3.5)\quad \frac{C^6}{B^7}=x^{23}\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{120n})^4\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)\,x^{12\nu(\nu+1)}\right)$$
$$+5\,x^{23}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\,x^{24n}\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{120n})^4\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)\,x^{12\nu(\nu+1)}\right).$$

Nun ist $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)\equiv 0,1$ oder $3 \pmod 5$; es ist unmöglich, daß $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)\equiv 2$ oder $4 \pmod 5$ ist. Ist ferner $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)\equiv 3 \pmod 5$, so ist $\nu\equiv 2 \pmod 5$, so daß $2\nu+1\equiv 0 \pmod 5$ ist.

Wir wenden diese Betrachtungen auf (3.5) an und sehen, daß $\frac{C^6}{B^7}$ eine Potenzentwicklung der Form

$$\frac{C^6}{B^7}=x^{23}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\,x^{24n}$$

besitzt, worin die Koeffizienten $\gamma_{5\nu+2}, \gamma_{5\nu+3}, \gamma_{5\nu+4}$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ durch 5 teilbar sind.

Die Gestalt von (3.43) zeigt jetzt, daß für $n = 5\nu + 2, 5\nu + 3, 5\nu + 4$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$

$$p\left(5^{2m} n + \frac{23 \cdot 5^{2m} + 1}{24}\right) \equiv 0 \pmod{5^{2m+1}}$$

ist. Dieses Ergebnis sagt uns für die zweite Form von n nichts anderes als das Ergebnis von Hilfssatz 1 für ungerades α. Dennoch besagen die anderen Ergebnisse, daß für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$p\left(5^{2m+1} n + \frac{71 \cdot 5^{2m} + 1}{24}\right) \equiv 0 \pmod{5^{2m+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$p\left(5^{2m+1} n + \frac{119 \cdot 5^{2m} + 1}{24}\right) \equiv 0 \pmod{5^{2m+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

gilt, w. z. b. w.

Wir betrachten jetzt weitere Kongruenzeigenschaften von

$$p\left(\frac{23 \cdot 5^{2m} + 1}{24}\right) \quad \text{und} \quad p\left(\frac{19 \cdot 5^{2m+1} + 1}{24}\right).$$

Zunächst bemerken wir, daß

$$\frac{C^6}{B^7} = x^{23}(1 + 7x^{24} + 35x^{48} + 140x^{72} + \cdots)$$

ist, und vergleichen dann die Koeffizienten von x^{23} und x^{95} auf beiden Seiten von (3.43); es folgt für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$p(\delta'_m) = 5^{2m} \lambda_{m,0}, \quad p(\delta_m) = p(\delta'_m + 3 \cdot 5^{2m}) \equiv 140 \cdot 5^{2m} \lambda_{m,0} \pmod{5^{2m+3}}.$$

Ebenso ist

$$\frac{C^5}{B^6} = x^{19}(1 + 6x^{24} + 27x^{48} + 98x^{72} + 315x^{96} + \cdots),$$

und Vergleich der Koeffizienten von x^{19} und x^{115} auf beiden Seiten von (3.44) liefert für $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$p(\delta_m) = 5^{2m+1} \mu_{m,0}, \quad p(\delta'_{m+1}) = p(\delta_m + 4 \cdot 5^{2m+1}) \equiv 315 \cdot 5^{2m+1} \mu_{m,0} \pmod{5^{2m+3}}.$$

Es ist unmittelbar klar, daß diese Ergebnisse sich in der Form

$$\mu_{m,0} \equiv 28 \lambda_{m,0} \pmod{25} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\lambda_{m+1,0} \equiv 63 \mu_{m,0} \pmod{5} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

darstellen lassen. Ferner ist $\mu_{0,0} = 1$.

Man überzeugt sich jetzt leicht mittels Induktion, daß

$$\mu_{m,0} \equiv 3^{2m} \pmod{5} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\lambda_{m,0} \equiv 3^{2m-1} \pmod{5} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, und folglich für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$p\left(\frac{23 \cdot 5^{2m} + 1}{24}\right) \equiv 3^{2m-1} \cdot 5^{2m} \pmod{5^{2m+1}},$$

$$p\left(\frac{19 \cdot 5^{2m+1} + 1}{24}\right) \equiv 3^{2m} \cdot 5^{2m+1} \pmod{5^{2m+2}}.$$

Diese Ergebnisse zeigen unmittelbar, daß die Zerfällungsanzahlen

$$p\left(\frac{23 \cdot 5^{2m} + 1}{24}\right), \quad p\left(\frac{19 \cdot 5^{2m+1} + 1}{24}\right)$$

für $m = 1, 2, 3, \ldots$ sicher nicht durch 5^{2m+1} bzw. 5^{2m+2} teilbar sind.

Weiterhin kann man auf die folgende Weise verschiedene Kongruenzeigenschaften von $p(n)$ herleiten. Da $p(\delta_m) = 5^{2m+1}\mu_{m,0}$ ist, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5^{2m+1}n + \delta_m)\, x^{24n+19} = p(\delta_m)\frac{C^5}{B^6} + 5^{2m+6}\sum_{N=1}^{\infty}\mu_{m,N}\,5^{5(N-1)}\frac{C^{12N+5}}{B^{12N+6}} + 5^{2m+3}\sum_{N=0}^{\infty}\mu'_{m,N}\,5^{5N}\frac{C^{12N+11}}{B^{12N+12}}.$$

Folglich haben wir für $m = 1, 2, 3, \ldots$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$p(5^{2m+1}n + \delta_m) \equiv p(\delta_m)\frac{p(5n+\delta_0)}{5} \pmod{5^{2m+3}},$$

d. h.

$$(3.61)\qquad p\left(5^{2m+1}n + \frac{19\cdot 5^{2m+1}+1}{24}\right) \equiv p\left(\frac{19\cdot 5^{2m+1}+1}{24}\right)\frac{p(5n+4)}{5} \pmod{5^{2m+3}}.$$

Ferner haben wir $p(\delta'_m) = 5^{2m}\lambda_{m,0}$ und daher gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5^{2m}n + \delta'_m)\, x^{24n+23} = p(\delta'_m)\frac{C^6}{B^7} + 5^{2m+5}\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{m,\nu}\,5^{5(\nu-1)}\frac{C^{12\nu+6}}{B^{12\nu+7}} + 5^{2m+3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda'_{m,\nu}\,5^{5\nu}\frac{C^{12\nu+12}}{B^{12\nu+13}}$$

und insbesondere

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(25n+24)\, x^{24n+23} = p(24)\frac{C^6}{B^7} + 5^7\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{1,\nu}\,5^{5(\nu-1)}\frac{C^{12\nu+6}}{B^{12\nu+7}} + 5^5\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda'_{1,\nu}\,5^{5\nu}\frac{C^{12\nu+12}}{B^{12\nu+13}}.$$

Man eliminiert $\frac{C^6}{B^7}$ aus diesen Gleichungen mittels Multiplikation mit $\frac{p(24)}{25}$ bzw. $\frac{p(\delta'_m)}{25}$. Da $\frac{p(24)}{25}$ und $\frac{p(\delta'_m)}{5^{2m}}$ ganzzahlig sind, so ergibt sich

$$\frac{p(24)}{25}\,p(5^{2m}n + \delta'_m) - \frac{p(25n+24)}{25}\,p(\delta'_m) \equiv 0 \pmod{5^{2m+3}},$$

d. h.

$$126\,p(5^{2m}n + \delta'_m) - 2p(\delta'_m)\frac{p(25n+24)}{25} \equiv 0 \pmod{5^{2m+3}}.$$

Da $125\,p(5^{2m}n + \delta'_m) \equiv 0 \pmod{5^{2m+3}}$ ist, so erhalten wir leicht für $m = 2, 3, 4, \ldots$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$p(5^{2m}n + \delta'_m) - 2p(\delta'_m)\frac{p(25n+24)}{25} \equiv 0 \pmod{5^{2m+3}},$$

d. h.

$$(3.62)\qquad p\left(5^{2m}n + \frac{23\cdot 5^{2m}+1}{24}\right) - 2p\left(\frac{23\cdot 5^{2m}+1}{24}\right)\frac{p(25n+24)}{25} \equiv 0 \pmod{5^{2m+3}}.$$

Wir betrachten jetzt die Teilbarkeit von

$$p\left(5^{2m+1}n + \frac{19\cdot 5^{2m+1}+1}{24}\right)$$

durch 5^{2m+2}. Da $p(\delta_m)$ nicht durch 5^{2m+2} teilbar ist, besagt (3. 61), daß $p(5^{2m+1}n + \delta_m)$ dann und nur dann durch 5^{2m+2} teilbar ist, wenn $p(5n+4)$ durch 25 teilbar ist. Nun gibt es aber zwei Klassen von Zahlen n derart, daß $p(5n+4)$ durch 25 teilbar ist. Nach Hauptsatz 1 gibt es eine regelmäßige Klasse, die aus der Folge $n = 5\nu + 4$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) besteht. Ferner zeigen die MacMahonsche Tafel und die Guptaschen Tafeln, daß eine unregelmäßige Klasse vorhanden ist, die aus den Zahlen $n = 8, 15, 17, 37, 41, 46, 51, 53, 55, 65, 75, 77, 102, 106, 110, 116, \ldots$ besteht.

Wir betrachten außerdem die Teilbarkeit von

$$p\left(5^{2m}n + \frac{23 \cdot 5^{2m} + 1}{24}\right)$$

durch 5^{2m+1}. Da $p(\delta'_m)$ nicht durch 5^{2m+1} teilbar ist, besagt (3. 62), daß $p(5^{2m}n + \delta'_m)$ dann und nur dann durch 5^{2m+1} teilbar ist, wenn $p(25n+24)$ durch 125 teilbar ist. Nun gibt es zwei Klassen von Zahlen n derart, daß $p(25n+24)$ durch 125 teilbar ist. Nach den Hauptsätzen 1 und 2 gibt es eine regelmäßige Klasse, die aus den Folgen $n = 5\nu + 2,\ 5\nu + 3,\ 5\nu + 4$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) besteht. Es gibt weiter eine unregelmäßige Klasse, deren einziges in den oben erwähnten Tafeln vorkommendes Beispiel die Zahl 6 bildet, da $p(174) \equiv 0 \pmod{125}$ ist.

Ich kann nichts weiter über einfache Kongruenzeigenschaften von $p(n)$ bezüglich Potenzen von 5 sagen.

§ 4. Die Modulargleichung 7-ter Ordnung.

Wir beginnen das Studium der Modulargleichung 7-ter Ordnung mit der Bemerkung, daß die Zahl n auf der rechten Seite der Formel

$$f(-q^2) = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{2\nu}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{3n^2+n}$$

die Werte $7m,\ 7m \pm 1,\ 7m \pm 2,\ 7m \pm 3$ ($m = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty$) durchläuft. Folglich haben wir

$$\begin{aligned} f(-q^2) = {} & \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{147m^2+7m} - q^4 \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{147m^2+49m} - q^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{147m^2-35m} \\ & + q^{14} \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{147m^2+91m} + q^{10} \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{147m^2-77m} \\ & - q^{30} \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{147m^2+133m} - q^{24} \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{147m^2-119m} \\ = {} & f(-q^{140}, -q^{154}) - q^4 f(-q^{98}, -q^{196}) - q^2 f(-q^{112}, -q^{182}) \\ & + q^{14} f(-q^{56}, -q^{238}) + q^{10} f(-q^{70}, -q^{224}) \\ & - q^{30} f(-q^{14}, -q^{280}) - q^{24} f(-q^{28}, -q^{266}). \end{aligned}$$

Setzen wir $x^{\frac{1}{14}}$ statt q, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(-x^{\frac{1}{7}})}{f(-x^7)} = {} & \frac{f(-x^{10}, -x^{11}) + xf(-x^4, -x^{17})}{f(-x^7)} - x^{\frac{1}{7}} \frac{f(-x^8, -x^{13}) + x^2 f(-x, -x^{20})}{f(-x^7)} \\ & - x^{\frac{2}{7}} + x^{\frac{5}{7}} \frac{f(-x^5, -x^{16}) - xf(-x^2, -x^{19})}{f(-x^7)}, \end{aligned}$$

d. h.

$$\frac{f(-x^{\frac{1}{7}})}{f(-x^7)} = J_0 - x^{\frac{1}{7}} J_1 - x^{\frac{2}{7}} + x^{\frac{5}{7}} J_5,$$

wobei J_0, J_1, J_5 Funktionen von x bezeichnen, die als Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten darstellbar sind.

Wir ersetzen nun Q in Hilfssatz 2 durch $x^{\frac{7}{2}}$ und außerdem Z durch $x^{\frac{5}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}}$ bzw. $x^{\frac{1}{2}}$. Auf diese Weise erhalten wir die Formeln

$$[f(-x^{10},-x^{11})+x\,f(-x^{4},-x^{17})]\,f(-x,-x^{6})=f(-x^{2},-x^{5})\,f(-x^{7}),$$
$$[f(-x^{8},-x^{13})+x^{2}f(-x,-x^{20})]\,f(-x^{2},-x^{5})=f(-x^{3},-x^{4})\,f(-x^{7}),$$
$$[f(-x^{5},-x^{16})-x\,f(-x^{2},-x^{19})]\,f(-x^{3},-x^{4})=f(-x,-x^{6})\,f(-x^{7}).$$

Folglich haben wir

$$(4.\,1)\qquad \frac{f(-x^{\frac{1}{7}})}{f(-x^{7})}=\frac{f(-x^{2},-x^{5})}{f(-x,-x^{6})}-x^{\frac{1}{7}}\frac{f(-x^{3},-x^{4})}{f(-x^{2},-x^{5})}-x^{\frac{2}{7}}+x^{\frac{5}{7}}\frac{f(-x,-x^{6})}{f(-x^{3},-x^{4})},$$

woraus folgt, daß $J_0J_1J_5\equiv 1$ ist.

Nun ist leicht zu sehen, daß

$$\begin{aligned}(J_0-x^{\frac{1}{7}}J_1-x^{\frac{2}{7}}+x^{\frac{5}{7}}J_5)^3\equiv{}&(J_0^3+3xJ_1^2J_5-6xJ_0J_5)+x^{\frac{1}{7}}(x^2J_5^3-3J_0^2J_1+6xJ_1J_5)\\&+3x^{\frac{2}{7}}(J_0J_1^2-J_0^2+xJ_5)-x^{\frac{3}{7}}(J_1^3-3xJ_0J_5^2-6J_0J_1)\\&-3x^{\frac{4}{7}}(xJ_1J_5^2+J_1^2-J_0)+3x^{\frac{5}{7}}(J_0^2J_5-xJ_5^2-J_1)\\&-x^{\frac{6}{7}}(1+6J_0J_1J_5)\end{aligned}$$

ist. Wir schreiben dieses Ergebnis in der Form

$$(J_0-x^{\frac{1}{7}}J_1-x^{\frac{2}{7}}+x^{\frac{5}{7}}J_5)^3\equiv\sum_{\nu=0}^{6}x^{\frac{\nu}{7}}G_\nu,$$

wobei $G_0, G_1, \ldots, G_6$ Funktionen von x bezeichnen, die als Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten darstellbar sind.

Ferner ist

$$(J_0-x^{\frac{1}{7}}J_1-x^{\frac{2}{7}}+x^{\frac{5}{7}}J_5)^3=\frac{f^3(-x^{\frac{1}{7}})}{f^3(-x^{7})}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n(2n+1)\,x^{\frac{n(n+1)}{14}}}{\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n(2n+1)\,x^{\frac{7n(n+1)}{2}}}.$$

Nun ergibt sich $n(n+1)\equiv 0, 2, 6$ oder 12 (mod 14). Es ist unmöglich, daß $n(n+1)\equiv 4, 8$ oder 10 (mod 14) ist. Durch Potenzenvergleichung ist jetzt klar, daß

$$(J_0-x^{\frac{1}{7}}J_1-x^{\frac{2}{7}}+x^{\frac{5}{7}}J_5)^3=G_0+x^{\frac{1}{7}}G_1+x^{\frac{3}{7}}G_3+x^{\frac{6}{7}}G_6$$

ist. Deshalb erhalten wir die Ergebnisse

$$G_2=0,\quad G_4=0,\quad G_5=0.$$

Durch dieselben Methoden können wir den Hilfssatz, daß $G_6=-7$ ist, beweisen. Ist nämlich $n(n+1)\equiv 12$ (mod 14), so ist $n\equiv 3$ (mod 7). Folglich haben wir für $n=7m+3$

$$\begin{aligned}x^{\frac{6}{7}}G_6&=\frac{\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{7m+3}(14m+7)\,x^{\frac{(7m+3)(7m+4)}{14}}}{f^3(-x^{7})}\\&=-7x^{\frac{6}{7}}\frac{\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)\,x^{\frac{7m(m+1)}{2}}}{f^3(-x^{7})}=-7x^{\frac{6}{7}},\end{aligned}$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Da $G_2=G_4=G_5=0$ ist, ergibt sich

$$(4.\,2)\qquad\begin{cases}J_0J_1^2-J_0^2+xJ_5=0,\\ xJ_1J_5^2+J_1^2-J_0=0,\\ J_5J_0^2-xJ_5^2-J_1=0.\end{cases}$$

Da $G_6\equiv -7$ ist, ergibt sich noch einmal die Identität $J_0J_1J_5\equiv 1$.

Wir setzen noch zur Abkürzung

$$x^{-\frac{2}{7}} J_0 = a, \quad -x^{-\frac{1}{7}} J_1 = b, \quad x^{\frac{3}{7}} J_5 = c, \quad \frac{f(-x^{\frac{1}{7}})}{x^{\frac{2}{7}} f(-x^7)} = \xi$$

(so daß $abc = -1$ ist) und betrachten die kubische Gleichung

$$\theta^3 - P\theta^2 + Q\theta - R = 0,$$

die die Wurzeln a, b, c besitzt. Es ist klar, daß $P = \xi + 1$, $R = -1$ ist.

Wir leiten zunächst aus den Beziehungen (4. 2) das Ergebnis her, daß Q in einfacher Weise als irrationale Funktion von ξ darstellbar ist.

Diese Beziehungen ($J_0 J_1 J_5 = 1$ natürlich ausgenommen) lassen sich in der zyklischen Form

$$\begin{cases} ab^2 - a^2 + c = 0, \\ bc^2 - b^2 + a = 0, \\ ca^2 - c^2 + b = 0 \end{cases} \tag{4. 3}$$

ausdrücken. Wir bemerken jetzt, daß die drei Beziehungen in Verbindung mit dem Ergebnis $abc = -1$ sich auf eine einzige Beziehung reduzieren lassen. Um die Richtigkeit dieser Bemerkung zu erkennen, multipliziert man die Beziehungen mit c, a bzw. b. Dadurch erhält man noch einmal dieselben Beziehungen in anderer Reihenfolge. Um diese Beziehung in symmetrischer Gestalt zu erhalten, addiert man die Beziehungen nach Multiplikation mit a, b bzw. c. In dieser Weise sieht man, daß

$$\Sigma b^2 c^2 - \Sigma a^3 + \Sigma bc = 0$$

sein muß.

Aus diesem Ergebnis in Verbindung mit den Newtonschen Formeln für Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung ist jetzt leicht zu erkennen, daß

$$(Q^2 - 2PR) - (P^3 - 3PQ + 3R) + Q = 0$$

ist. Wegen $P = \xi + 1$, $R = -1$ haben wir

$$Q^2 + (3\xi + 4)Q - (\xi^3 + 3\xi^2 + \xi - 4) = 0, \tag{4. 4}$$

so daß

$$2Q = -(3\xi + 4) \pm \sqrt{4\xi^3 + 21\xi^2 + 28\xi}$$

ist. Ist x klein, so ist $\xi \sim x^{-\frac{2}{7}}$, $Q \sim -x^{-\frac{3}{7}}$; daher muß man das Minuszeichen der Quadratwurzel einsetzen.

Nun nehmen wir das Studium der Gleichung

$$\frac{f(-x^{\frac{1}{7}})}{x^{\frac{2}{7}} f(-x^7)} = x^{-\frac{2}{7}} J_0 - x^{-\frac{1}{7}} J_1 - 1 + x^{\frac{3}{7}} J_5 = a + b - 1 + c$$

wieder auf. Wir schreiben $\varepsilon_r = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. Ferner schreiben wir zuweilen ε statt ε_r ($r = 1, 2, \ldots, 7$), so daß

$$\frac{f(-\varepsilon x^{\frac{1}{7}})}{x^{\frac{2}{7}} f(-\varepsilon x^7)} = a + b\varepsilon + c\varepsilon^5 - \varepsilon^2$$

ist. Es ist jetzt leicht zu sehen, daß

$$\prod_{r=1}^{7} \left(1 - \varepsilon_r^{\nu} x^{\frac{\nu}{7}}\right) = 1 - x^{\nu}, \qquad \nu \not\equiv 0 \pmod 7,$$

$$\prod_{r=1}^{7} \left(1 - \varepsilon_r^{\nu} x^{\frac{\nu}{7}}\right) = \left(1 - x^{\frac{\nu}{7}}\right)^7, \qquad \nu \equiv 0 \pmod 7$$

ist und folglich

$$\prod_{r=1}^{7} f(-\varepsilon_r x^{\frac{1}{7}}) = \frac{f^8(-x)}{f(-x^7)}.$$

Es ergibt sich daher

$$\frac{f^8(-x)}{x^2 f^8(-x^7)} = \prod_{r=1}^{7}\left(\frac{f(-\varepsilon_r x^{\frac{1}{7}})}{x^{\frac{2}{7}} f(-x^7)}\right) = \prod_{r=1}^{7}(a + b\varepsilon_r + c\varepsilon_r^5 - \varepsilon_r^2).$$

Nun sieht man leicht, daß

$$\begin{aligned}\prod_{r=1}^{7}(a + b\varepsilon_r + c\varepsilon_r^5 + d\varepsilon_r^2) &\equiv a^7 + b^7 + c^7 + d^7 + 7(abc - d^3)(b^3c + c^3a + a^3b)\\ &\quad - 7d(bc^5 + ca^5 + ab^5) - 7a^2b^2c^2d + 14abcd^4\\ &\quad + 14d^2(b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b^3)\end{aligned}$$

ist. Folglich haben wir

$$\begin{aligned}\frac{f^8(-x)}{x^2 f^8(-x^7)} &= a^7 + b^7 + c^7 + 7(bc^5 + ca^5 + ab^5)\\ &\quad + 14(b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b^3) + 7a^2b^2c^2 + 14abc - 1,\end{aligned}$$

worin man jetzt die zyklischen Funktionen von a, b, c als Funktionen zuerst von P, Q, R und nachher von ξ ausdrücken muß.

Die Newtonsche Formel für Potenzsummen besagt, daß

$$a^7 + b^7 + c^7 = P^7 - 7P^5Q + 14P^3Q^2 - 7PQ^3 + 7P^4R - 21P^2QR + 7Q^2R + 7PR^2$$

ist. Ferner haben wir nach (4. 3)

$$\begin{aligned}bc^5 + ca^5 + ab^5 &= c^3(b^2 - a) + a^3(c^2 - b) + b^3(a^3 - c)\\ &= b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b^3 - b^3c - c^3a - a^3b\\ &= bc(bc^2 - b^2) + ca(ca^2 - c^2) + ab(ab^2 - a^2)\\ &= -3abc = 3,\end{aligned}$$

während wir leicht erhalten

$$\begin{aligned}b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b^3 &= bc(b^2 - a) + ca(c^2 - b) + ab(a^2 - c)\\ &= b^3c + c^3a + a^3b - 3abc\\ &= \Sigma a^2\,\Sigma bc - bc^3 - ca^3 - ab^3 - abc(3 + \Sigma a)\\ &= \Sigma a^2\,\Sigma bc - c(b^2 - a) - a(c^2 - b) - b(a^2 - c) - abc(3 + \Sigma a)\\ &= (1 + \Sigma a^2)\,\Sigma bc - abc\,\Sigma a - (b^2c + c^2a + a^2b + 3abc)\\ &= (1 + \Sigma a^2)\,\Sigma bc - abc\,\Sigma a - \Sigma a\,\Sigma bc + bc^2 + ca^2 + ab^2\\ &= (1 + \Sigma a^2)\,\Sigma bc - abc\,\Sigma a - \Sigma a\,\Sigma bc + \Sigma a^2 - \Sigma a\\ &= P^2Q + P^2 - PQ - 2Q^2 - Q.\end{aligned}$$

Wenn man diese Ergebnisse kombiniert, erhält man

$$\begin{aligned}\frac{f^8(-x)}{x^2 f^8(-x^7)} &= P^7 - 7P^4 + 14P^2 + 7P + 13 - Q(7P^5 - 35P^2 + 14P + 14)\\ &\quad + Q^2(14P^3 - 35) - 7PQ^3\\ &= \xi^7 + 7\xi^6 + 21\xi^5 + 28\xi^4 + 7\xi^3 - 7\xi^2 + 14\xi + 28\\ &\quad - Q(7\xi^5 + 35\xi^4 + 70\xi^3 + 35\xi^2 - 21\xi)\\ &\quad + Q^2(14\xi^3 + 42\xi^2 + 42\xi - 21) - Q^3(7\xi + 7).\end{aligned}$$

Durch Formel (4. 4), die man in der Gestalt

$$Q^2 = -Q(3\xi + 4) + \xi^3 + 3\xi^2 + \xi - 4$$

ausdrücken kann, ist der Ausdruck auf der rechten Seite der oben erwähnten Gleichung als lineare Funktion von Q darstellbar. Nach dieser Vereinfachung erhalten wir

$$\frac{f^8(-x)}{x^2 f^8(-x^7)} = \xi^7 + 21\xi^6 + 126\xi^5 + 322\xi^4 + 294\xi^3 - 147\xi^2 - 343\xi \\ - 7Q(\xi^5 + 12\xi^4 + 49\xi^3 + 84\xi^2 + 49\xi),$$

so daß

$$\frac{f^8(-x)}{x^2 f^8(-x^7)} = \frac{\xi^4}{2}[2\xi^3 + 63\xi^2 + 532\xi + 2009 + 3724\xi^{-1} + 3087\xi^{-2} + 686\xi^{-3} \\ + 7(\xi^2 + 12\xi + 49 + 84\xi^{-1} + 49\xi^{-2})\sqrt{4\xi + 21 + 28\xi^{-1}}]$$

ist. Der rechts in Klammern stehende Ausdruck bleibt unverändert, wenn man ξ durch $7\xi^{-1}$ ersetzt. Daher ist dieser Ausdruck als rationale Funktion von Θ darstellbar, wobei

$$\Theta^2 = 4\xi + 21 + 28\xi^{-1}, \qquad \Theta = +\sqrt{4\xi + 21 + 28\xi^{-1}}$$

ist. In der Tat ist leicht zu erkennen, daß

$$\frac{f^8(-x)}{x^2 f^8(-x^7)} = \frac{\xi^4}{64}[\Theta^6 + 63\Theta^4 - 49\Theta^2 + 49 + 7\Theta(2\Theta^4 + 12\Theta^2 - 4)] \\ = \frac{\xi^4}{64}[\Theta^3 + 7\Theta^2 + 7\Theta - 7]^2$$

gilt. Folglich haben wir

$$\frac{f^4(-x)}{x f^4(-x^7)} = \pm\frac{\xi^2}{8}[\Theta^3 + 7\Theta^2 + 7\Theta - 7] \tag{4.5}$$

$$= \pm\frac{\xi^2}{2}[7\xi + 35 + 49\xi^{-1} + (\xi + 7 + 7\xi^{-1})\Theta]$$

$$= \pm\frac{1}{2}[7\xi^3 + 35\xi^2 + 49\xi + (\xi^2 + 7\xi + 7)\sqrt{4\xi^3 + 21\xi^2 + 28\xi}].$$

Ist x klein, so ist

$$7\xi^3 + 35\xi^2 + 49\xi \sim 7x^{-\frac{6}{7}},$$

$$(\xi^2 + 7\xi + 7)\sqrt{4\xi^3 + 21\xi^2 + 28\xi} \sim 2x^{-1},$$

so daß überall das Pluszeichen stehen muß.

Nach dieser Ersetzung liefert die Gleichung (4. 5) das Ergebnis

$$\frac{f^8(-x)}{x^2 f^8(-x^7)} - (7\xi^3 + 35\xi^2 + 49\xi)\frac{f^4(-x)}{x f^4(-x^7)} \\ - (\xi^7 + 7\xi^6 + 21\xi^5 + 49\xi^4 + 147\xi^3 + 343\xi^2 + 343\xi) = 0.$$

Da $\xi = \dfrac{f(-x^{\frac{1}{7}})}{x^{\frac{2}{7}} f(-x^7)}$ ist, so haben wir jetzt die Modulargleichung 7-ter Ordnung erhalten.

Die Modulargleichung läßt sich folgendermaßen ausdrücken.

Es sei

$$\Phi_7(A, B, C) \equiv A^7C + 7A^6C^2 + 21A^5C^3 + 49A^4C^4 + 147A^3C^5 + 343A^2C^6 + 343AC^7 \\ + B^4(7A^3C + 35A^2C^2 + 49AC^3) - B^8,$$

dann ergibt sich die neue Art der Modulargleichung 7-ter Ordnung in der Form

$$\Phi_7(A, B, C) = 0,$$

wobei A, B, C natürlich $x^{\frac{1}{168}} f(-x^{\frac{1}{7}})$, $x^{\frac{1}{24}} f(-x)$, $x^{\frac{7}{24}} f(-x^7)$ bzw. (in den Tannery-Molkschen Bezeichnungen) $h\left(\dfrac{\tau}{7}\right)$, $h(\tau)$, $h(7\tau)$ bedeuten.

§ 5. Kongruenzeigenschaften von $p(n)$ bezüglich 7^β.

Nach der Untersuchung der Modulargleichung 7-ter Ordnung neuer Art gehen wir zum Studium der Kongruenzeigenschaften von $p(n)$ über.

Um die in den Hauptsätzen 3 und 4 aufgeführten Eigenschaften von $p(n)$ zu beweisen, definieren wir einen Operator Ω_7 derart, daß

$$\Omega_7 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{7n} x^n \tag{5. 11}$$

ist. Ist $F(x)$ eine beliebige eindeutige Funktion von x, so ist leicht zu sehen, daß

$$7\Omega_7 F(x) = \sum_{r=1}^{7} F(\varepsilon_r x^{\frac{1}{7}}) \tag{5. 12}$$

sein muß.

Die in § 3 erläuterten Eigenschaften von Ω_5 lassen sich fast wörtlich auf den jetzigen Fall übertragen und liefern die folgenden Ergebnisse:

$$\Omega_7^{2m+1} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(7^{2m+1}n + \Delta_m)\, x^{24n+17} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5. 13}$$

$$\Omega_7^{2m} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(7^{2m}n + \Delta'_m)\, x^{24n+23} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5. 14}$$

wobei

$$\Delta_0 = 5, \qquad \Delta'_{m+1} = \Delta_m + 6 \cdot 7^{2m+1}, \qquad \Delta_m = \Delta'_m + 4 \cdot 7^{2m}$$

ist. Durch Induktion überzeugt man sich leicht, daß

$$\Delta_m = \frac{17 \cdot 7^{2m+1} + 1}{24}, \qquad \Delta'_m = \frac{23 \cdot 7^{2m} + 1}{24}$$

ist. Wir haben insbesondere

$$\Omega_7 \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(7n + 5)\, x^{24n+17}, \tag{5. 15}$$

$$\Omega_7^2 \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(49n + 47)\, x^{24n+23}, \tag{5. 16}$$

$$\Omega_7^3 \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(343n + 243)\, x^{24n+17}.$$

Wenden wir jetzt den Operator Ω_7 auf die in § 4 hergeleiteten Modulargleichung 7-ter Ordnung an! In dieser Modulargleichung, nämlich

$$A^7C + 7A^6C^2 + 21A^5C^3 + 49A^4C^4 + 147A^3C^5 + 343A^2C^6 + 343AC^7 + B^4(7A^3C + 35A^2C^2 + 49AC^3) = B^8,$$

setzen wir

$$A = x^{\frac{1}{7}} f(-x^{\frac{2\cdot 4}{7}}), \qquad B = xf(-x^{24}), \qquad C = x^7 f(-x^{168}).$$

Ferner setzen wir zur Abkürzung

$$X = \frac{B}{A}, \qquad Y = \frac{C}{B},$$

so daß

$$X^7 - (343Y^7 + 49Y^3)X^6 - (343Y^6 + 35Y^2)X^5 - (147Y^5 + 7Y)X^4 - 49Y^4X^3 - 21Y^3X^2 - 7Y^2X - Y = 0 \tag{5. 2}$$

ist. Bei gegebenem x und $Y \equiv \dfrac{x^7 f(-x^{168})}{xf(-x^{24})}$ sind die Wurzeln dieser Gleichung 7-ten

Grades in X gleich

$$\frac{xf(-x^{24})}{\varepsilon_r x^{\frac{1}{7}} f(-\varepsilon_r^{24} x^{\frac{24}{7}})}, \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots, 7).$$

Nun ist nach (5. 12) für ganzzahliges ν

$$7\Omega_7 Y^\nu = \sum_{r=1}^{7} \left(\frac{xf(-x^{24})}{\varepsilon_r x^{\frac{1}{7}} f(-\varepsilon_r^{24} x^{\frac{24}{7}})} \right)^\nu .$$

Es ist wichtig zu bemerken, daß der Ausdruck auf der rechten Seite gleich der Summe der ν-ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung (5. 2) in X ist.

Es ist bequem, diese Summe der ν-ten Potenzen der Wurzeln in der Form

$$7S_\nu$$

zu schreiben, so daß

$$\Omega_7 Y^\nu = S_\nu \tag{5. 21}$$

ist. Ferner bestätigt man leicht mit Hilfe von (5. 12), daß

$$\Omega_7\left(\frac{C^\nu}{B^\nu}\right) = B\Omega_7\left(\frac{C^{\nu-1}}{B^\nu}\right) \tag{5. 22}$$

ist; folglich ist

$$\Omega_7\left(\frac{C^{\nu-1}}{B^\nu}\right) = \frac{S_\nu}{B}. \tag{5. 23}$$

Es ist jetzt klar, daß

$$\Omega_7 \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1} = \Omega_7\left(\frac{1}{xf(-x^{24})}\right) = \frac{S_1}{B} = \frac{7C^3}{B^4} + \frac{49C^7}{B^8} \tag{5. 31}$$

ist [22]). Ferner ist

$$\Omega_7^2 \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^{24n-1} = \Omega_7\left(\frac{7C^3}{B^4} + \frac{49C^7}{B^8}\right) = \frac{7S_4}{B} + \frac{49S_8}{B}. \tag{5. 32}$$

Durch wiederholte Anwendung der Newtonschen Formeln für Potenzsummen überzeugt man sich leicht, daß

$$\begin{aligned}
S_1 &= 7^2\, Y^7 + 7Y^3,\\
S_2 &= 7^5\, Y^{14} + 2\cdot 7^4\, Y^{10} + 9\cdot 7^2\, Y^6 + 10Y^2,\\
S_3 &= 7^8\, Y^{21} + 3\cdot 7^7\, Y^{17} + 24\cdot 7^5\, Y^{13} + 85\cdot 7^3\, Y^9 + 114\cdot 7Y^5 + 3Y,\\
S_4 &= 7^{11}\, Y^{28} + 4\cdot 7^{10}\, Y^{24} + 46\cdot 7^8\, Y^{20} + 272\cdot 7^6\, Y^{16} + 845\cdot 7^4\, Y^{12}\\
&\quad + 176\cdot 7^3\, Y^8 + 82\cdot 7Y^4,\\
S_5 &= 7^{14}\, Y^{35} + 5\cdot 7^{13}\, Y^{31} + 75\cdot 7^{11}\, Y^{27} + 620\cdot 7^9\, Y^{23} + 3025\cdot 7^7\, Y^{19}\\
&\quad + 1233\cdot 7^6\, Y^{15} + 1895\cdot 7^4\, Y^{11} + 1265\cdot 7^2\, Y^7 + 190\, Y^3,\\
S_6 &= 7^{17}\, Y^{42} + 6\cdot 7^{16}\, Y^{38} + 111\cdot 7^{14}\, Y^{34} + 1178\cdot 7^{12}\, Y^{30} + 7830\cdot 7^{10}\, Y^{26}\\
&\quad + 4770\cdot 7^9\, Y^{22} + 12825\cdot 7^7\, Y^{18} + 20424\cdot 7^5\, Y^{14} + 16782\cdot 7^3\, Y^{10}\\
&\quad + 736\cdot 7^2\, Y^6 + 27Y^2,
\end{aligned}$$

---

[22]) Dieses Ergebnis hat Ramanujan in der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(7n+5)\, x^n = 7\,\frac{(1-x^7)^3\,(1-x^{14})^3\,(1-x^{21})^3\cdots}{(1-x)^4\,(1-x^2)^4\,(1-x^3)^4\cdots} + 49x\,\frac{(1-x^7)^7\,(1-x^{14})^7\,(1-x^{21})^7\cdots}{(1-x)^8\,(1-x^2)^8\,(1-x^3)^8\cdots}$$

angegeben. Siehe a. a. O. [6]).

$$S_7 = 7^{20}\,Y^{49} + 7\cdot 7^{19}\,Y^{45} + 154\cdot 7^{17}\,Y^{41} + 1995\cdot 7^{15}\,Y^{37} + 16779\cdot 7^{13}\,Y^{33} + 13608\cdot 7^{12}\,Y^{29} + 52507\cdot 7^{10}\,Y^{25} + 1\,35114\cdot 7^{8}\,Y^{21} + 2\,20780\cdot 7^{6}\,Y^{17} + 29722\cdot 7^{5}\,Y^{13} + 13314\cdot 7^{3}\,Y^{9} + 1771\cdot 7\,Y^{5} + Y.$$

$$S_8 = 7^{23}\,Y^{56} + 8\cdot 7^{22}\,Y^{52} + 204\cdot 7^{20}\,Y^{48} + 3120\cdot 7^{18}\,Y^{44} + 31734\cdot 7^{16}\,Y^{40} + 32136\cdot 7^{15}\,Y^{36} + 1\,61744\cdot 7^{13}\,Y^{32} + 5\,77616\cdot 7^{11}\,Y^{28} + 14\,37043\cdot 7^{9}\,Y^{24} + 3\,42056\cdot 7^{8}\,Y^{20} + 3\,55504\cdot 7^{6}\,Y^{16} + 2\,02592\cdot 7^{4}\,Y^{12} + 48758\cdot 7^{2}\,Y^{8} + 352\cdot 7\,Y^{4}$$

ist. Aus den Ausdrücken für S_4 und S_8 bestätigt man mit Hilfe von (5.32), daß eine Entwicklung von der Form

$$\Omega_7^2 \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\,x^{24n-1} = 7^2 \sum_{m=1}^{14} \alpha_m \frac{C^{4m}}{B^{4m+1}} \tag{5.33}$$

existiert, worin die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{14}$ ganzzahlig sind.

Da die Koeffizienten in der Entwicklung von $\dfrac{C^{\nu-1}}{B^{\nu}}$ nach Potenzen von x für ganzzahliges ν selbstverständlich ganzzahlig sind, so sieht man aus (5.31) und (5.33) mit Hilfe von (5.15) und (5.16), daß

$$p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7, \qquad p(49n+47) \equiv 0 \pmod{49}$$

sein müssen. Folglich haben wir jetzt Hauptsatz 3 bewiesen.

Wünscht man weitere Ergebnisse zu erzielen, so muß man natürlich Kongruenzeigenschaften der Koeffizienten in der Entwicklung von S_ν nach Potenzen von Y ableiten. Wenn man die Newtonschen Formeln für Potenzsummen weiter anwendet, so ergeben sich folgende durch Induktion leicht beweisbare Formeln:

$$S_{7\nu+1} = \sum_{n=0}^{3\nu} \varrho_{n,\nu,1}\,7^{7n+1}\,Y^{16n+\nu+3} + \sum_{n=0}^{3\nu} \varrho'_{n,\nu,1}\,7^{7n+2}\,Y^{16n+\nu+7} + \sum_{n=0}^{3\nu-1} \varrho''_{n,\nu,1}\,7^{7n+4}\,Y^{16n+\nu+11} + \sum_{n=0}^{3\nu-1} \varrho'''_{n,\nu,1}\,7^{7n+6}\,Y^{16n+\nu+15},$$

$$S_{7\nu+2} = \sum_{n=0}^{3\nu} \varrho_{n,\nu,2}\,7^{7n}\,Y^{16n+\nu+2} + \sum_{n=0}^{3\nu} \varrho'_{n,\nu,1}\,7^{7n+2}\,Y^{16n+\nu+6} + \sum_{n=0}^{3\nu} \varrho''_{n,\nu,2}\,7^{7n+4}\,Y^{16n+\nu+10} + \sum_{n=0}^{3\nu} \varrho'''_{n,\nu,2}\,7^{7n+5}\,Y^{16n+\nu+14},$$

$$S_{7\nu+3} = \sum_{n=0}^{3\nu+1} \varrho_{n,\nu,3}\,7^{7n}\,Y^{16n+\nu+1} + \sum_{n=0}^{3\nu+1} \varrho'_{n,\nu,3}\,7^{7n+1}\,Y^{16n+\nu+5} + \sum_{n=0}^{3\nu} \varrho''_{n,\nu,3}\,7^{7n+3}\,Y^{16n+\nu+9} + \sum_{n=0}^{3\nu} \varrho'''_{n,\nu,3}\,7^{7n+5}\,Y^{16n+\nu+13},$$

$$S_{7\nu+4} = \sum_{n=0}^{3\nu+1} \varrho_{n,\nu,4}\,7^{7n+1}\,Y^{16n+\nu+4} + \sum_{n=0}^{3\nu+1} \varrho'_{n,\nu,4}\,7^{7n+3}\,Y^{16n+\nu+8} + \sum_{n=0}^{3\nu+1} \varrho''_{n,\nu,4}\,7^{7n+4}\,Y^{16n+\nu+12} + \sum_{n=0}^{3\nu} \varrho'''_{n,\nu,1}\,7^{7n+6}\,Y^{16n+\nu+16},$$

$$S_{7\nu+5} = \sum_{n=0}^{3\nu+2} \varrho_{n,\nu,5}\,7^{7n}\,Y^{16n+\nu+3} + \sum_{n=0}^{3\nu+1} \varrho'_{n,\nu,5}\,7^{7n+2}\,Y^{16n+\nu+7} + \sum_{n=0}^{3\nu+1} \varrho''_{n,\nu,5}\,7^{7n+4}\,Y^{16n+\nu+11} + \sum_{n=0}^{3\nu+1} \varrho'''_{n,\nu,5}\,7^{7n+6}\,Y^{16n+\nu+15},$$

$$S_{7\nu+6} = \sum_{n=0}^{3\nu+2} \varrho_{n,\nu,6}\,7^{7n}\,Y^{16n+\nu+2} + \sum_{n=0}^{3\nu+2} \varrho'_{n,\nu,6}\,7^{7n+2}\,Y^{16n+\nu+6} + \sum_{n=0}^{3\nu+2} \varrho''_{n,\nu,6}\,7^{7n+3}\,Y^{16n+\nu+10} + \sum_{n=0}^{3\nu+1} \varrho'''_{n,\nu,6}\,7^{7n+5}\,Y^{16n+\nu+14},$$

$$S_{7\nu+7} = \varrho_{0,\nu,7}\,Y^{\nu+1} + \sum_{n=1}^{3\nu+3} \varrho_{n,\nu,7}\,7^{7n-1}\,Y^{16n+\nu+1} + \sum_{n=0}^{3\nu+2} \varrho'_{n,\nu,7}\,7^{7n+1}\,Y^{16n+\nu+5} + \sum_{n=0}^{3\nu+2} \varrho''_{n,\nu,7}\,7^{7n+3}\,Y^{16n+\nu+9} + \sum_{n=0}^{3\nu+2} \varrho'''_{n,\nu,7}\,7^{7n+5}\,Y^{16n+\nu+13},$$

wobei die Koeffizienten $\varrho_{n,\nu,r}$, $\varrho'_{n,\nu,r}$, $\varrho''_{n,\nu,r}$, $\varrho'''_{n,\nu,r}$, $(r = 1, 2, 3, \ldots, 7)$ ganzzahlig sein müssen und ν die ganzen Zahlen 0, 1, 2, ... durchläuft.

Es ist bequem, die letzte Formel in der Form

$$S_{7\nu+7} = \sum_{n=0}^{3\nu+3} \varrho^*_{n,\nu,7}\, 7^{7n-1}\, Y^{16n+\nu+1} + \sum_{n=0}^{3\nu+2} \varrho'_{n,\nu,7}\, 7^{7n+1}\, Y^{16n+\nu+5}$$
$$+ \sum_{n=0}^{3\nu+2} \varrho''_{n,\nu,7}\, 7^{7n+3}\, Y^{16n+\nu+9} + \sum_{n=0}^{3\nu+2} \varrho'''_{n,\nu,7}\, 7^{7n+5}\, Y^{16n+\nu+13}$$

zu schreiben, wobei der Stern die Ersetzung von $\varrho_{0,\nu,7}$ durch $7\varrho_{0,\nu,7}$ bezeichnet.

Wenn man diese Entwicklungen für $S_{7\nu+r}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots, 7)$ nach wachsenden Potenzen von Y ordnet, so sieht man, daß die Differenzen der Exponenten der in aufeinander folgenden Gliedern stehenden Potenzen von 7 die Folge ..., 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, ... bilden. Wegen dieser Unregelmäßigkeit der Differenzen ist es ratsam, die Entwicklungen der $S_{7\nu+r}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots, 7)$ wie oben explizit auszuschreiben, um Irrtümer und Unklarheiten zu vermeiden.

Was die Exponenten der Potenzen von Y und die oberen Grenzen der Summen betrifft, ist die Richtigkeit der obenerwähnten Formeln wegen der Newtonschen Formeln offenbar. Es bleibt nur noch übrig, die Ganzzahligkeit der Koeffizienten $\varrho_{n,\nu,r}$, $\varrho'_{n,\nu,r}$, $\varrho''_{n,\nu,r}$, $\varrho'''_{n,\nu,r}$ zu beweisen. Jedoch ist es bequem, eine kleine Veränderung vorzunehmen, nämlich die oberen Grenzen der Summen durch ∞ zu ersetzen. Natürlich muß man dann die Zahlen $\varrho_{n,\nu,r}$, $\varrho'_{n,\nu,r}$, $\varrho''_{n,\nu,r}$, $\varrho'''_{n,\nu,r}$ für hinreichend große Werte von n gleich Null setzen, so daß keine Konvergenzschwierigkeiten auftreten.

Wir führen den Beweis der Ganzzahligkeit von $\varrho_{n,\nu,r}$, $\varrho'_{n,\nu,r}$, $\varrho''_{n,\nu,r}$, $\varrho'''_{n,\nu,r}$ mittels Induktion. Die Behauptungen sind offenbar richtig für $\nu = 0$. Wir nehmen sie jetzt für einen speziellen Wert von ν als richtig an und zeigen, daß sie dann für $\nu + 1$ richtig sind.

Infolge der Newtonschen Formel ist

$$S_{7\nu+8} = (343\,Y^7 + 49\,Y^3)\,S_{7\nu+7} + (343\,Y^6 + 35\,Y^2)\,S_{7\nu+6} + (147\,Y^5 + 7\,Y)\,S_{7\nu+5}$$
$$+ 49\,Y^4 S_{7\nu+4} + 21\,Y^3 S_{7\nu+3} + 7\,Y^2 S_{7\nu+2} + Y S_{7\nu+1}.$$

Wir setzen für die $S_{7\nu+r}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots, 7)$ die obenerwähnten Ausdrücke ein und erhalten das folgende Ergebnis:

$$S_{7\nu+8} = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_{n,\nu+1,1}\, 7^{7n+1}\, Y^{16n+\nu+4} + \sum_{n=0}^{\infty} \varrho'_{n,\nu+1,1}\, 7^{7n+2}\, Y^{16n+\nu+8}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \varrho''_{n,\nu+1,1}\, 7^{7n+4}\, Y^{16n+\nu+12} + \sum_{n=0}^{\infty} \varrho'''_{n,\nu+1,1}\, 7^{7n+6}\, Y^{16n+\nu+16},$$

worin die Koeffizienten den Bedingungen

$$\varrho_{0,\nu+1,1} = \varrho_{0,\nu,1} + \varrho_{0,\nu,2} + 3\varrho_{0,\nu,3} + \varrho_{0,\nu,5} + 5\varrho_{0,\nu,6} + 7\varrho_{0,\nu,7},$$
$$\varrho_{n,\nu+1,1} = \varrho_{n,\nu,1} + \varrho_{n,\nu,2} + 3\varrho_{n,\nu,3} + \varrho_{n,\nu,5} + 5\varrho_{n,\nu,6} + \varrho_{n,\nu,7}$$
$$+ (\varrho'''_{n-1,\nu,4} + 3\varrho'''_{n-1,\nu,5} + \varrho'''_{n-1,\nu,6} + \varrho'''_{n-1,\nu,7}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$\varrho'_{0,\nu+1,1} = \varrho'_{0,\nu,1} + 7\varrho'_{0,\nu,2} + 3\varrho'_{0,\nu,3} + 7\varrho'_{0,\nu,5} + 35\varrho'_{0,\nu,6} + 7\varrho'_{0,\nu,7}$$
$$+ (7\varrho_{0,\nu,4} + 3\varrho_{0,\nu,5} + 7\varrho_{0,\nu,6} + 7\varrho_{0,\nu,7}),$$
$$\varrho'_{n,\nu+1,1} = \varrho'_{n,\nu,1} + 7\varrho'_{n,\nu,2} + 3\varrho'_{n,\nu,3} + 7\varrho'_{n,\nu,5} + 35\varrho'_{n,\nu,6} + 7\varrho'_{n,\nu,7}$$
$$+ (7\varrho_{n,\nu,4} + 3\varrho_{n,\nu,5} + 7\varrho_{n,\nu,6} + \varrho_{n,\nu,7}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$\varrho''_{n,\nu+1,1} = \varrho''_{n,\nu,1} + 7\varrho''_{n,\nu,2} + 3\varrho''_{n,\nu,3} + 7\varrho''_{n,\nu,5} + 5\varrho''_{n,\nu,6} + 7\varrho''_{n,\nu,7}$$
$$+ (7\varrho'_{n,\nu,3} + 3\varrho'_{n,\nu,5} + 7\varrho'_{n,\nu,6} + \varrho'_{n,\nu,7}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$\varrho'''_{n,\nu+1,1} = \varrho'''_{n,\nu,1} + \varrho'''_{n,\nu,2} + 3\varrho'''_{n,\nu,3} + 7\varrho'''_{n,\nu,5} + 5\varrho'''_{n,\nu,6} + 7\varrho'''_{n,\nu,7}$$
$$+ (\varrho''_{n,\nu,4} + 3\varrho''_{n,\nu,5} + \varrho''_{n,\nu,6} + \varrho''_{n,\nu,7}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügen. Diese Bedingungen zeigen unmittelbar, daß die Ganzzahligkeit der Koeffizienten $\varrho_{n,\nu,r}$, $\varrho'_{n,\nu,r}$, $\varrho''_{n,\nu,r}$, $\varrho'''_{n,\nu,r}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots, 7)$ die Ganzzahligkeit der Koeffizienten $\varrho_{n,\nu+1,1}$, $\varrho'_{n,\nu+1,1}$, $\varrho''_{n,\nu+1,1}$, $\varrho'''_{n,\nu+1,1}$ zur Folge hat. Ebenso findet man schrittweise für $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, daß $\varrho_{n,\nu+1,r}$, $\varrho'_{n,\nu+1,r}$, $\varrho''_{n,\nu+1,r}$, $\varrho'''_{n,\nu+1,r}$ ganzzahlig sind. Hieraus erkennt man leicht mittels Induktion die Gültigkeit der Behauptungen.

Es ist jetzt möglich, die folgenden Ergebnisse mittels Induktion zu beweisen:

$$(5.41)\quad \Omega_7^{2m}\left(\frac{1}{B}\right) = 7^{m+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_{m,\nu}7^{7\nu}\frac{C^{16\nu+4}}{B^{16\nu+5}} + 7^{m+3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda'_{m,\nu}7^{7\nu}\frac{C^{16\nu+8}}{B^{16\nu+9}} + 7^{m+4}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda''_{m,\nu}7^{7\nu}\frac{C^{16\nu+12}}{B^{16\nu+13}} + 7^{m+6}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda'''_{m,\nu}7^{7\nu}\frac{C^{16\nu+16}}{B^{16\nu+17}},$$

$$(5.42)\quad \Omega_7^{2m+1}\left(\frac{1}{B}\right) = 7^{m+1}\sum_{N=0}^{\infty}\mu_{m,N}7^{7N}\frac{C^{16N+3}}{B^{16N+4}} + 7^{m+3}\sum_{N=0}^{\infty}\mu'_{m,N}7^{7N}\frac{C^{16N+7}}{B^{16N+8}} + 7^{m+5}\sum_{N=0}^{\infty}\mu''_{m,N}7^{7N}\frac{C^{16N+11}}{B^{16N+12}} + 7^{m+7}\sum_{N=0}^{\infty}\mu'''_{m,N}7^{7N}\frac{C^{16N+15}}{B^{16N+16}}.$$

Das Wesentliche an diesen Ergebnissen, die für $m = 1, 2, 3, \ldots$ gelten, ist die Ganzzahligkeit der Koeffizienten $\lambda_{m,\nu}$, $\lambda'_{m,\nu}$, $\lambda''_{m,\nu}$, $\lambda'''_{m,\nu}$, $\mu_{m,N}$, $\mu'_{m,N}$, $\mu''_{m,N}$, $\mu'''_{m,N}$, und wir bemerken, daß diese Koeffizienten für hinreichend große Werte von ν und N gleich Null sind; folglich sind die scheinbar unendlichen Reihen tatsächlich endlich.

Die Behauptung (5.41) ist für $m = 1$ offenbar richtig. Wir nehmen sie jetzt für einen speziellen Wert von m als richtig an und zeigen, daß die Behauptung (5.42) für diesen Wert von m richtig ist. Aus der Richtigkeit von (5.42) können wir dann die Richtigkeit von (5.41) nach Ersetzung von m durch $m + 1$ herleiten. Hieraus bestätigt man leicht die Gültigkeit der Formeln mittels Induktion.

Ist die Behauptung (5.41) richtig, so folgt nach (5.23)

$$\Omega_7^{2m+1}\left(\frac{1}{B}\right) = 7^{m+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_{m,\nu}7^{7\nu}\frac{S_{16\nu+5}}{B} + 7^{m+3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda'_{m,\nu}7^{7\nu}\frac{S_{16\nu+9}}{B} + 7^{m+4}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda''_{m,\nu}7^{7\nu}\frac{S_{16\nu+13}}{B} + 7^{m+6}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda'''_{m,\nu}7^{7\nu}\frac{S_{16\nu+17}}{B},$$

d. h.

$$B\Omega_7^{2m+1}\left(\frac{1}{B}\right) = \sum_{r=0}^{6}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_{m,7\nu+r}7^{49\nu+7r+m+1}S_{112\nu+16r+5} + \sum_{r=0}^{6}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda'_{m,7\nu+r}7^{49\nu+7r+m+3}S_{112\nu+16r+9} + \sum_{r=0}^{6}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda''_{m,7\nu+r}7^{49\nu+7r+m+4}S_{112\nu+16r+13} + \sum_{r=0}^{6}\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda'''_{m,7\nu+r}7^{49\nu+7r+m+6}S_{112\nu+16r+17},$$

durch Zerlegung der Reihen auf der rechten Seite.

In dieser Formel ersetzt man die Summen S_ν durch die mittels Induktion abgeleiteten Ausdrücke, so daß $B\Omega_7^{2m+1}\left(\frac{1}{B}\right)$ sich in eine Entwicklung nach Potenzen von Y verwandelt, worin die Koeffizienten sich als lineare Funktionen von $\lambda_{m,\nu}$, $\lambda'_{m,\nu}$, $\lambda''_{m,\nu}$, $\lambda'''_{m,\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ ausdrücken lassen. Durch Vergleich dieser Entwicklung mit (5.42) erhält man

$$\mu_{m,N} = \sum_{\nu=0}^{N}\{\lambda_{m,7\nu}\varrho_{N-\nu,16\nu,5}7^{42\nu} + \lambda'_{m,7\nu}\varrho_{N-\nu,16\nu+1,2}7^{42\nu+2} + \lambda''_{m,7\nu}\varrho_{N-\nu,16\nu+1,6}7^{42\nu+3} + \lambda'''_{m,7\nu}\varrho_{N-\nu,16\nu+2,3}7^{42\nu+5} + \cdots\},$$

$$\mu'_{m,N} = \sum_{\nu=0}^{N} \{ \lambda_{m,7\nu}\, \varrho'_{N-\nu,16\nu,5}\, 7^{42\nu} + \lambda'_{m,7\nu}\, \varrho'_{N-\nu,16\nu+1,2}\, 7^{42\nu+2} + \lambda''_{m,7\nu}\, \varrho'_{N-\nu,16\nu+1,6}\, 7^{42\nu+3} + \lambda'''_{m,7\nu}\, \varrho'_{N-\nu,16\nu+2,3}\, 7^{42\nu+4} + \cdots \},$$

$$\mu''_{m,N} = \sum_{\nu=0}^{N} \{ \lambda_{m,7\nu}\, \varrho''_{N-\nu,16\nu,5}\, 7^{42\nu} + \lambda'_{m,7\nu}\, \varrho''_{N-\nu,16\nu+1,2}\, 7^{42\nu+2} + \lambda''_{m,7\nu}\, \varrho''_{N-\nu,16\nu+1,6}\, 7^{42\nu+2} + \lambda'''_{m,7\nu}\, \varrho''_{N-\nu,16\nu+2,3}\, 7^{42\nu+4} + \cdots \},$$

$$\mu'''_{m,N} = \sum_{\nu=0}^{N} \{ \lambda_{m,7\nu}\, \varrho'''_{N-\nu,16\nu,5}\, 7^{42\nu} + \lambda'_{m,7\nu}\, \varrho'''_{N-\nu.16\nu+1,2}\, 7^{42\nu+1} + \lambda''_{m,7\nu}\, \varrho'''_{N-\nu,16\nu+1,6}\, 7^{42\nu+2} + \lambda'''_{m,7\nu}\, \varrho'''_{N-\nu,16\nu+2,3}\, 7^{42\nu+4} + \cdots \}.$$

In jedem von diesen vier Ausdrücken haben wir nur vier von den 28 Reihen auf den rechten Seiten ausgeschrieben. Man verifiziert leicht, daß in dem Ausdruck für $\mu_{m,N}$ die Potenzen von 7, die mit $\lambda_{m,7\nu+r}$, $\lambda'_{m,7\nu+r}$, $\lambda''_{m,7\nu+r}$ bzw. $\lambda'''_{m,7\nu+r}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, 6)$ multipliziert auftreten, gerade $7^{42\nu+6r}$, $7^{42\nu+6r+2}$, $7^{42\nu+6r+3}$ bzw. $7^{42\nu+6r+5}$ sind [23]). Entsprechendes gilt für $\mu'_{m,N}$, $\mu''_{m,N}$, $\mu'''_{m,N}$. Falls der Leser hierüber in Zweifel ist, braucht er nur die entsprechenden 112 Ausdrücke auszuschreiben, um sich von der Richtigkeit der Behauptung zu überzeugen.

Sind $\lambda_{m,\nu}$, $\lambda'_{m,\nu}$, $\lambda''_{m,\nu}$, $\lambda'''_{m,\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ ganzzahlig, so besagen die oben erwähnten lang ausgedehnten Formeln, daß $\mu_{m,N}$, $\mu'_{m,N}$, $\mu''_{m,N}$, $\mu'''_{m,N}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ auch ganzzahlig sind. Hiermit haben wir den ersten Teil des erforderlichen Induktionsschlusses vollendet.

Nehmen wir jetzt das Ergebnis (5. 42) an, so folgt nach (5. 23)

$$\Omega_7^{2m+2}\left(\frac{1}{B}\right) = 7^{m+1} \sum_{N=0}^{\infty} \mu_{m,N}\, 7^{7N}\, \frac{S_{16N+4}}{B} + 7^{m+3} \sum_{N=0}^{\infty} \mu'_{m,N}\, 7^{7N}\, \frac{S_{16N+8}}{B} + 7^{m+5} \sum_{N=0}^{\infty} \mu''_{m,N}\, 7^{7N}\, \frac{S_{16N+12}}{B} + 7^{m+7} \sum_{N=0}^{\infty} \mu'''_{m,N}\, 7^{7N}\, \frac{S_{16N+16}}{B},$$

d. h.

$$B\Omega_7^{2m+2}\left(\frac{1}{B}\right) = \sum_{r=0}^{6} \sum_{N=0}^{\infty} \mu_{m,7N+r}\, 7^{49N+7r+m+1}\, S_{112N+16r+4} + \sum_{r=0}^{6} \sum_{N=0}^{\infty} \mu'_{m,7N+r}\, 7^{49N+7r+m+3}\, S_{112N+16r+8} + \sum_{r=0}^{6} \sum_{N=0}^{\infty} \mu''_{m,7N+r}\, 7^{49N+7r+m+5}\, S_{112N+16r+12} + \sum_{r=0}^{6} \sum_{N=0}^{\infty} \mu'''_{m,7N+r}\, 7^{49N+7r+m+7}\, S_{112N+16r+16},$$

durch Zerlegung der Reihen auf der rechten Seite.

In dieser Formel ersetzt man die Summen S_ν durch die mittels Induktion abgeleiteten Ausdrücke, so daß $B\Omega_7^{2m+2}\left(\frac{1}{B}\right)$ sich in eine Entwicklung nach Potenzen von Y verwandelt, worin die Koeffizienten sich als lineare Funktionen von $\mu_{m,N}$, $\mu'_{m,N}$, $\mu''_{m,N}$, $\mu'''_{m,N}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ ausdrücken lassen. Durch Vergleich dieser Entwicklung mit (5. 41) erhält man

$$\lambda_{m+1,\nu} = \sum_{N=0}^{\nu} \{ \mu_{m,7N}\, \varrho_{\nu-N,16N,4}\, 7^{42N} + \mu'_{m,7N}\, \varrho_{\nu-N,16N+1,1}\, 7^{42N+2} + \mu''_{m,7N}\, \varrho_{\nu-N,16N+1,5}\, 7^{42N+3} + \mu'''_{m,7N}\, \varrho_{\nu-N,16N+2,2}\, 7^{42N+5} + \cdots \},$$

$$\lambda'_{m+1,\nu} = \sum_{N=0}^{\nu} \{ \mu_{m,7N}\, \varrho'_{\nu-N,16N,4}\, 7^{42N} + \mu'_{m,7N}\, \varrho'_{\nu-N,16N+1,1}\, 7^{42N+1} + \mu''_{m,7N}\, \varrho'_{\nu-N,16N+1,5}\, 7^{42N+3} + \mu'''_{m,7N}\, \varrho'_{\nu-N,16N+2,2}\, 7^{42N+5} + \cdots \},$$

[23]) Man vergleiche die Gestalt der entsprechenden in § 3 erhaltenen Ausdrücke von $\mu_{m,N}$ und $\mu'_{m,N}$.

$$\lambda''_{m+1,\nu} = \sum_{N=0}^{\nu} \{ \mu_{m,7N}\, \varrho''_{\nu-N,16N,4}\, 7^{42N} + \mu'_{m,7N}\, \varrho''_{\nu-N,16N+1,1}\, 7^{42N+2} + \mu''_{m,7N}\, \varrho''_{\nu-N,16N+1,5}\, 7^{42N+4} + \mu'''_{m,7N}\, \varrho''_{\nu-N,16N+2,2}\, 7^{42N+6} + \cdots \},$$

$$\lambda'''_{m+1,\nu} = \sum_{N=0}^{\nu} \{ \mu_{m,7N}\, \varrho'''_{\nu-N,16N,4}\, 7^{42N} + \mu'_{m,7N}\, \varrho'''_{\nu-N,16N+1,1}\, 7^{42N+2} + \mu''_{m,7N}\, \varrho'''_{\nu-N,16N+1,5}\, 7^{42N+4} + \mu'''_{m,7N}\, \varrho'''_{\nu-N,16N+2,2}\, 7^{42N+5} + \cdots \}.$$

In jedem von diesen vier Ausdrücken haben wir wie oben nur vier von den 28 Reihen auf den rechten Seiten ausgeschrieben. Man verifiziert leicht, daß in dem Ausdruck für $\lambda_{m+1,\nu}$ die Potenzen von 7, die mit $\mu_{m,7N+r}$, $\mu'_{m,7N+r}$, $\mu''_{m,7N+r}$ bzw. $\mu'''_{m,7N+r}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, 6)$ multipliziert auftreten, gerade 7^{42N+6r}, $7^{42N+6r+2}$, $7^{42N+6r+3}$ bzw. $7^{42N+6r+5}$ sind [24]). Entsprechendes gilt für $\lambda'_{m+1,\nu}$, $\lambda''_{m+1,\nu}$, $\lambda'''_{m+1,\nu}$.

Sind $\mu_{m,N}$, $\mu'_{m,N}$, $\mu''_{m,N}$, $\mu'''_{m,N}$ $(N = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ ganzzahlig, so besagen die obenerwähnten Formeln, daß $\lambda_{m+1,\nu}$, $\lambda'_{m+1,\nu}$, $\lambda''_{m+1,\nu}$, $\lambda'''_{m+1,\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ auch ganzzahlig sind. Hiermit haben wir den vollständigen Beweis der Voraussetzungen (5. 41) und (5. 42) mittels Induktion beendigt.

Schreiben wir jetzt die Ergebnisse (5. 41) und (5. 42) mit Hilfe von (5. 14) und (5. 13) in der Form

$$(5.\,43)\quad \sum_{n=0}^{\infty} p(7^{2m} n + \Delta'_m)\, x^{24n+23} = 7^{m+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{m,\nu}\, 7^{7\nu} \frac{C^{16\nu+4}}{B^{16\nu+5}} + 7^{m+3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda'_{m,\nu}\, 7^{7\nu} \frac{C^{16\nu+8}}{B^{16\nu+9}} + 7^{m+4} \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda''_{m,\nu}\, 7^{7\nu} \frac{C^{16\nu+12}}{B^{16\nu+13}} + 7^{m+6} \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda'''_{m,\nu}\, 7^{7\nu} \frac{C^{16\nu+16}}{B^{16\nu+17}},$$

$$(5.\,44)\quad \sum_{n=0}^{\infty} p(7^{2m+1} n + \Delta_m)\, x^{24n+17} = 7^{m+1} \sum_{N=0}^{\infty} \mu_{m,N}\, 7^{7N} \frac{C^{16N+3}}{B^{16N+4}} + 7^{m+3} \sum_{N=0}^{\infty} \mu'_{m,N}\, 7^{7N} \frac{C^{16N+7}}{B^{16N+8}} + 7^{m+5} \sum_{N=0}^{\infty} \mu''_{m,N}\, 7^{7N} \frac{C^{16N+11}}{B^{16N+12}} + 7^{m+7} \sum_{N=0}^{\infty} \mu'''_{m,N}\, 7^{7N} \frac{C^{16N+15}}{B^{16N+16}},$$

und beachten wir, daß die Koeffizienten in den Entwicklungen von $\dfrac{C^{4\nu+4}}{B^{4\nu+5}}$ und $\dfrac{C^{4N+3}}{B^{4N+4}}$ nach Potenzen von x ganzzahlig sein müssen, so ergibt sich für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$(5.\,45)\qquad p\left(7^{2m} n + \frac{23 \cdot 7^{2m} + 1}{24}\right) \equiv 0 \pmod{7^{m+1}},$$

$$(5.\,46)\qquad p\left(7^{2m+1} n + \frac{17 \cdot 7^{2m+1} + 1}{24}\right) \equiv 0 \pmod{7^{m+1}}.$$

Wir sehen unmittelbar aus (5. 45), daß wir jetzt Hauptsatz 4 bewiesen haben. Darüber hinaus folgt (5. 46) als Spezialfall von (5. 45), wie man sofort sieht, wenn man in (5. 45) n durch $7\nu + 4$ ersetzt.

Es ist jetzt leicht, Hauptsatz 5 zu beweisen. Wir betrachten die Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{C^3}{B^4} = \left(\frac{B^7}{C}\right)^{-1} C^2 B^3.$$

[24]) Man vergleiche die Gestalt der entsprechenden in § 3 erhaltenen Ausdrücke von $\lambda_{m+1,\nu}$ und $\lambda'_{m+1,\nu}$.

Da

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^{24n})^7}{(1-x^{168n})}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-7\,\frac{x^{24n}-3x^{48n}+5x^{72n}-5x^{96n}+3x^{120n}-x^{144n}}{1-x^{168n}}\right)$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{B^7}{C}=1+7\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\,x^{24n},$$

wo die Koeffizienten β_n ganzzahlig sind. Man sieht jetzt, daß

$$\left(\frac{B^7}{C}\right)^{-1}=1+7\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n'\,x^{24n}$$

ist, wo die Koeffizienten β_n' auch ganzzahlig sind. Folglich haben wir

$$\begin{aligned}(5.5)\qquad \frac{C^3}{B^4}&=x^{17}\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{168n})^2\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\,(2\nu+1)\,x^{12\nu(\nu+1)}\right)\\&\quad+7x^{17}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n'\,x^{24n}\right)\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{168n})^2\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\,(2\nu+1)\,x^{12\nu(\nu+1)}\right).\end{aligned}$$

Nun ist $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)\equiv 0, 1, 3$ oder $6 \pmod 7$; es ist unmöglich, daß $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)\equiv 2, 4$ oder $5 \pmod 7$ ist. Ist ferner $\frac{1}{2}\nu(\nu+1)\equiv 6 \pmod 7$, so ist $\nu\equiv 3 \pmod 7$, so daß $2\nu+1\equiv 0 \pmod 7$ ist.

Wir wenden diese Betrachtungen auf (5.5) an und sehen, daß $\dfrac{C^3}{B^4}$ eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$\frac{C^3}{B^4}=x^{17}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\,x^{24n}$$

besitzt, worin die Koeffizienten $\gamma_{7\nu+2}, \gamma_{7\nu+4}, \gamma_{7\nu+5}, \gamma_{7\nu+6}$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$ durch 7 teilbar sind.

Die Gestalt von (5.31) und (5.44) zeigt jetzt, daß für $n=7\nu+2,\ 7\nu+4,\ 7\nu+5,\ 7\nu+6$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$ und $m=0, 1, 2, \ldots$

$$p(7^{2m+1}n+\Delta_m)\equiv 0 \pmod{7^{m+2}}$$

ist. Dieses Ergebnis sagt uns für die vierte Form von n nichts anderes als das Ergebnis (5.45) mit $m+1$ statt m. Dennoch besagen die anderen Ergebnisse, daß für $m=0, 1, 2, \ldots$ und $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}p\left(7^{2m+2}n+\frac{65\cdot 7^{2m+1}+1}{24}\right)&\equiv 0 \pmod{7^{m+2}},\\ p\left(7^{2m+2}n+\frac{113\cdot 7^{2m+1}+1}{24}\right)&\equiv 0 \pmod{7^{m+2}},\\ p\left(7^{2m+2}n+\frac{137\cdot 7^{2m+1}+1}{24}\right)&\equiv 0 \pmod{7^{m+2}}\end{aligned}$$

gilt, w. z. b. w.

Z. B. haben wir

$$p(19)=7^2\times 10,\qquad p(33)=7^2\times 207,\qquad p(40)=7^2\times 762,\ldots$$

Ein weiteres Beispiel zu diesem Hauptsatz ist

$$p(929)\equiv p(1615)\equiv p(1958)\equiv 0 \pmod{343}.$$

Wir betrachten jetzt weitere Kongruenzeigenschaften von

$$p\left(\frac{23\cdot 7^{2m}+1}{24}\right) \quad \text{und} \quad p\left(\frac{17\cdot 7^{2m+1}+1}{24}\right).$$

Zunächst bemerken wir, daß

$$\frac{C^4}{B^5} = x^{23}(1 + 5x^{24} + 20x^{48} + 65x^{72} + 190x^{96} + \cdots)$$

ist, und vergleichen dann die Koeffizienten von x^{23} und x^{119} auf beiden Seiten von (5. 43); es folgt für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$p(\Delta'_m) = 7^{m+1}\lambda_{m,0}, \qquad p(\Delta_m) = p(\Delta'_m + 4\cdot 7^{2m}) \equiv 190\cdot 7^{m+1}\lambda_{m,0} \pmod{7^{m+3}}.$$

Ebenso ist

$$\frac{C^3}{B^4} = x^{17}(1 + 4x^{24} + 14x^{48} + 40x^{72} + 105x^{96} + 252x^{120} + 574x^{144} + \cdots)$$

und Vergleich der Koeffizienten von x^{17} und x^{161} auf beiden Seiten von (5. 44) liefert für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$p(\Delta_m) = 7^{m+1}\mu_{m,0}, \qquad p(\Delta'_{m+1}) = p(\Delta_m + 6\cdot 7^{2m+1}) \equiv 574\cdot 7^{m+1}\mu_{m,0} \pmod{7^{m+3}}.$$

Es ist unmittelbar klar, daß diese Ergebnisse sich in der Form

$$\mu_{m,0} \equiv 190\lambda_{m,0} \pmod{49}, \qquad \lambda_{m+1,0} \equiv 82\mu_{m,0} \pmod 7 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

darstellen lassen. Ferner ist $\lambda_{1,0} = 2546 \equiv 5 \pmod 7$.

Man überzeugt sich jetzt leicht mittels Induktion, daß

$$\mu_{m,0} \equiv \lambda_{m,0} \equiv 5^m \pmod 7$$

ist, und folglich für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$p\left(\frac{23\cdot 7^{2m}+1}{24}\right) \equiv p\left(\frac{17\cdot 7^{2m+1}+1}{24}\right) \equiv 5^m\cdot 7^{m+1} \pmod{7^{m+2}}.$$

Diese Ergebnisse zeigen unmittelbar, daß die Zerfällungsanzahlen

$$p\left(\frac{23\cdot 7^{2m}+1}{24}\right), \qquad p\left(\frac{17\cdot 7^{2m+1}+1}{24}\right)$$

für $m = 1, 2, 3, \ldots$ sicher nicht durch 7^{m+2} teilbar sind.

Zum Schluß bemerken wir, daß sich für $n = 1, 2, 3, \ldots$ leicht mittels der in § 3 erläuterten Methoden die folgenden Kongruenzen herleiten lassen:

(5. 61) $$p\left(7^{2m+1}n + \frac{17\cdot 7^{2m+1}+1}{24}\right) - p\left(\frac{17\cdot 7^{2m+1}+1}{24}\right)\frac{p(7n+5)}{7} \equiv 0 \pmod{7^{m+2}}$$
$(m = 1, 2, 3, \ldots),$

(5. 62) $$p(7^{2m+1}n + \Delta_m)\frac{p(\Delta_1)}{49} - p(\Delta_m)\frac{p(343n+\Delta_1)}{49} \equiv 0 \pmod{7^{m+3}}$$
$(m = 2, 3, 4, \ldots),$

(5. 63) $$p(7^{2m}n + \Delta'_m)\frac{p(\Delta'_1)}{49} - p(\Delta'_m)\frac{p(49n+\Delta'_1)}{49} \equiv 0 \pmod{7^{m+3}} \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots).$$

Die Kongruenzen (5.62) und (5.63) lassen sich in einfacherer Form darstellen, nämlich:

(5. 64) $$p\left(7^{2m+1}n + \frac{17\cdot 7^{2m+1}+1}{24}\right) + 4p\left(\frac{17\cdot 7^{2m+1}+1}{24}\right)\frac{p(343n+243)}{49} \equiv 0 \pmod{7^{m+3}}$$
$(m = 2, 3, 4, \ldots),$

(5. 65) $$p\left(7^{2m}n + \frac{23\cdot 7^{2m}+1}{24}\right) - 24p\left(\frac{23\cdot 7^{2m}+1}{24}\right)\frac{p(49n+47)}{49} \equiv 0 \pmod{7^{m+3}}$$
$(m = 2, 3, 4, \ldots).$

Wir können jetzt die Teilbarkeit von

$$p\left(7^{2m+1}N + \frac{17 \cdot 7^{2m+1} + 1}{24}\right) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

durch 7^{m+2} betrachten. Da $p(\Delta_m)$ nicht durch 7^{m+2} teilbar ist, besagt (5. 61), daß $p(7^{2m+1}N + \Delta_m)$ dann und nur dann durch 7^{m+2} teilbar ist, wenn $p(7N + 5)$ durch 49 teilbar ist. Nun gibt es aber zwei Klassen von Zahlen N derart, daß $p(7N + 5)$ durch 49 teilbar ist. Nach Hauptsatz 5 gibt es eine regelmäßige Klasse, die aus den Folgen $N = 7\nu + 2,\ 7\nu + 4,\ 7\nu + 5,\ 7\nu + 6$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ besteht. Es gibt weiter eine unregelmäßige Klasse, deren einziger in den vorhandenen Tafeln enthaltene Vertreter die Zahl $N = 73$ $(= 7 \cdot 10 + 3)$ ist [25]). Wir haben in der Tat

$$p(516) = p(7 \cdot 73 + 5) = 7^3 \times 16156\ 30607\ 00090\ 78531.$$

In ähnlicher Weise betrachten wir die Teilbarkeit von

$$p\left(7^{2m}n + \frac{23 \cdot 7^{2m} + 1}{24}\right) \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots)$$

durch 7^{m+2}. Da $p(\Delta'_m)$ nicht durch 7^{m+2} teilbar ist, besagt (5. 65), daß $p(7^{2m}n + \Delta'_m)$ dann und nur dann durch 7^{m+2} teilbar ist, wenn $p(49n + 47)$ durch 343 teilbar ist. Nun gibt es aber drei Klassen von Zahlen n derart, daß $p(49n + 47)$ durch 343 teilbar ist, nämlich eine regelmäßige Klasse und zwei unregelmäßige Klassen.

Um die regelmäßige Klasse zu erhalten, bemerken wir, daß für $N = 7\nu + 2, 7\nu + 4, 7\nu + 5, 7\nu + 6$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ die Kongruenz

$$p(7N + 5) \equiv 0 \pmod{49}$$

gilt. Es ergibt sich daher für dieselben Werte von N

$$p(7^{2m+1}N + \Delta_m) \equiv 0 \pmod{7^{m+2}}$$

und insbesondere

$$p(7^3N + \Delta_1) \equiv 0 \pmod{7^3}.$$

Da $7^3N + \Delta_1 = 49n + 47$ für $n = 7N + 4$ ist, so sehen wir unmittelbar, daß für $n = 49\nu + 18,\ 49\nu + 32,\ 49\nu + 39,\ 49\nu + 46$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ die Kongruenz

$$p(49n + 47) \equiv 0 \pmod{343}$$

gilt.

Aus der Klasse von unregelmäßigen Zahlen N, für die $p(7N + 5) \equiv 0 \pmod{7^2}$ ist, erhalten wir ebenso eine unregelmäßige Klasse von Zahlen $n(= 7N + 4)$ derart, daß

$$p(49n + 47) \equiv 0 \pmod{7^3}$$

ist. Z. B. haben wir $p(7 \cdot 73 + 5) \equiv 0 \pmod{7^2}$, so daß die Kongruenz

$$p(25282) = p(7^3 \cdot 73 + 243) = p(7^2 \cdot 515 + 47) \equiv 0 \pmod{343}$$

gilt.

Nun gibt es weiter eine Klasse von Zahlen n derart, daß $n \neq 7\nu + 4$ ist, welche die Kongruenzeigenschaft $p(49n + 47) \equiv 0 \pmod{343}$ besitzt. Um einen Vertreter dieser Klasse zu finden, behandeln wir den Ausdruck $\frac{C^4}{B^5}$, welchen das erste Glied der ersten Summe auf der rechten Seite von (5. 43) enthält, folgendermaßen:

---

[25]) Man beweist mittels (5.5) und der Potenzreihenentwicklung von C^2B^3, daß die Zahlen 98, 99, 105, 112, ... zu der unregelmäßigen Klasse gehören. Also gelten die Kongruenzen

$$p(691) \equiv p(698) \equiv p(740) \equiv p(789) \equiv 0 \pmod{49}.$$

Wird

$$\frac{C^4}{B^5} = x^{23}\sum_{\nu=0}^{\infty}\theta_\nu x^{24\nu}, \qquad C^3B^2 = x^{23}\sum_{\nu=0}^{\infty}\theta'_\nu x^{24\nu}$$

gesetzt, so haben wir

$$x^{23}\sum_{\nu=0}^{\infty}\theta_\nu x^{24\nu} = \frac{C}{B^7}\left(x^{23}\sum_{\nu=0}^{\infty}\theta'_\nu x^{24\nu}\right)$$
$$= x^{23}\sum_{\nu=0}^{\infty}\theta'_\nu x^{24\nu} + 7x^{23}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta'_\nu x^{24\nu}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\theta'_\nu x^{24\nu}\right)$$

und bemerken, daß wir vermöge der Ganzzahligkeit der Koeffizienten β'_ν unmittelbar die Kongruenz

$$\theta'_\nu \equiv \theta_\nu \pmod 7 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

erhalten.

Außerdem überzeugt man sich aus (5. 43), daß dann und nur dann $p(49n + 47) \equiv 0 \pmod{343}$ ist, wenn $\lambda_{1,0}\theta_n$ durch 7 teilbar ist. Da $\lambda_{1,0} = 2546 \equiv 5 \pmod 7$ ist, so bestätigt man, daß $p(49n + 47) \equiv 0 \pmod{343}$ dann und nur dann gilt, wenn θ'_n durch 7 teilbar ist.

Wir erinnern uns nun, daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\theta'_\nu x^\nu = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu(2\nu+1)\,x^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}\right)\left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^\nu x^{\frac{\nu(3\nu+1)}{2}}\right)^2$$

ist. Das Auftreten der in den rechtsstehenden Potenzreihenentwicklungen vorkommenden Lücken zeigt, daß die Koeffizienten θ_ν mittels dieser Entwicklung leicht berechnenbar sind. Hieraus finden wir tatsächlich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\theta_\nu x^\nu = 1 - 2x - x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 - 2x^6 - 3x^7 + 4x^8 + x^9 - 5x^{10}$$
$$- 3x^{11} - 6x^{12} + 8x^{13} + 3x^{14} + 4x^{15} + 8x^{16} - 3x^{17} + 0x^{18} - 2x^{19} - 8x^{20}$$
$$- 4x^{21} - 4x^{22} - 13x^{23} + 9x^{24} + 5x^{25} + 18x^{26} - 2x^{27} - 2x^{28} - 8x^{29} - 3x^{30}$$
$$+ 10x^{31} + 0x^{32} - 4x^{33} + 2x^{34} + 19x^{35} - 14x^{36} + 7x^{37} - 8x^{38} + 0x^{39} - 20x^{40}$$
$$- 4x^{41} - x^{42} + 8x^{43} - 2x^{44} - 15x^{45} - 7x^{46} + 8x^{47} + 26x^{48} - 10x^{49} + 26x^{50}$$
$$+ 18x^{51} + 10x^{52} - 2x^{53} + 10x^{54} - 28x^{55} - 29x^{56} + \ldots$$

Da 18, 32, 39, 46, ... regelmäßige Werte von n sind, so zeigt diese Entwicklung, daß die kleinsten zu der betrachteten unregelmäßigen Klasse gehörigen Werte von n gleich 36, 37, 55, ... sind. Die entsprechenden Werte von $49n + 47$ sind 1811, 1860, 2742, ..., woraus wir die Kongruenzen

$$p(1811) \equiv p(1860) \equiv p(2742) \equiv 0 \pmod{343}$$

ableiten.

Eingegangen 6. April 1938.